$\mathcal{D}$-moduly

Zápisky z přednášek

25. října 2012

Obsah

Úvod

Teorie $\mathcal{D}$-modulů

1 Svazek $\mathcal{D}_X$ a jeho moduly

1.1 Základní definice a pojmy

Definice 1.1. *Komplexní varieta* (complex manifold) dimenze n je Hausdorffův topologický prostor X splňující druhý axiom spočetnosti s třídou ekvivalence holomorfních atlasů. Systém $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se nazývá *holomorfní atlas* na X, pokud $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ tvoří otevřené pokrytí X, zobrazení $u_\alpha \colon U_\alpha \to u_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$ je homeomorfismus na otevřenou podmnožinu $u_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$ a

$$u_\alpha \circ u_\beta^{-1} \colon u_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to u_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{1.1}$$

je holomorfní zobrazení. Dvojice (U_α, u_α) se nazývá *lokální holomorfní mapa* nebo *lokální souřadnicový systém*. Dva holomorfní atlasy $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ a $\{(V_\beta, v_\beta)\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ na X se nazývají ekvivalentní, jestliže $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \cup \{(V_\beta, v_\beta)\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ je opět holomorfní atlas.

Definice 1.2. Nechť X je komplexní varieta dimenze n. Dále nechť $U \subset X$ je otevřená podmnožina. Pak funkce $f \colon U \to \mathbb{C}$ se nazývá *holomorfní funkce* na U, pokud

$$f \circ u_\alpha^{-1} \colon u_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \mathbb{C} \tag{1.2}$$

je holomorfní funkce pro každou lokální mapu (U_α, u_α) nějakého holomorfního atlasu v dané třídě ekvivalence. Množinu všech holomorfních funkcí na U budeme značit $\mathcal{O}_X(U)$. Navíc

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U) \tag{1.3}$$

spolu restrikcemi funkcí je svazek okruhů, který se nazývá *svazek holomorfních funkcí* na X nebo *strukturní svazek* (structure sheaf) komplexní variety X.

Definice 1.3. Nechť X a Y jsou komplexní variety. Spojité zobrazení $f \colon X \to Y$ se nazývá *holomorfní* zobrazení, jestliže $v_\beta \circ f \circ u_\alpha^{-1} \colon u_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \to v_\beta(V_\beta)$ je holomorfní zobrazení pro každou lokální mapu (U_α, u_α) nějakého holomorfního atlasu na X v daná třídě ekvivalence a pro každou lokální mapu (V_β, v_β) nějakého holomorfního atlasu na Y v daná třídě ekvivalence.

Zobrazení $f \colon X \to Y$ se nazývá *biholomorfní* zobrazení, jestliže f a f^{-1} jsou holomorfní zobrazení. Dvě komplexní variety X a Y se nazývají *izomorfní* nebo *biholomorfní*, jestliže existuje biholomorfní zobrazení $f \colon X \to Y$.

Nechť X je komplexní varieta a $\mathcal{O}_X$ její strukturní svazek, tj. svazek holomorfních funkcí na X. Dále označme $\mathbb{C}_X$ konstantní svazek se stéblem $\mathbb{C}$. Jelikož každá komplexní funkce $f \in \mathbb{C}_X(U)$ je zároveň holomorfní funkce na U, máme kanonický morfismus svazků okruhů $\mathbb{C}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X$, jenž zadává na $\mathcal{O}_X$ strukturu $\mathbb{C}_X$-algebry.

Nechť $\mathcal{M}$ je levý $\mathcal{O}_X$-modul. Definujeme svazek okruhů $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ jako

$$\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}), \tag{1.4}$$

tj. $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})(U) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X|_U}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{M}|_U)$ pro každou otevřenou množinu $U \subset X$. Přímo z definice svazku okruhů $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ plyne, že $\mathcal{M}$ má kanonickou strukturu levého $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$-modulu, která je dána předpisem

$$\begin{aligned} \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})(U) \times \mathcal{M}(U) &\to \mathcal{M}(U), \\ (\varphi, s) &\mapsto \varphi_U(s) \end{aligned} \tag{1.5}$$

a také kanonickou strukturu pravého $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}}$-modulu, která je dána předpisem

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(U) \times \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}}(U) &\to \mathcal{M}(U), \\ (s, \varphi) &\mapsto \varphi_U(s). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Poznamenejme, že $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ je obecně svazek nekomutativních okruhů.

• Vnoření $\mathcal{O}_X$ do $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_\mathcal{X})$

Definujme morfismus $i\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ svazků okruhů následujícím způsobem. Nechť $U \subset X$ je otevřená množina, pak zobrazení

$$i_U : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})(U)$$

je definováno vztahem

$$f \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}(V) \xrightarrow{(i_U(f))_V} \mathcal{M}(V) \\ s \mapsto f|_V s \end{array} \right\}. \tag{1.7}$$

Snadno se ověří, že $i\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ je morfismus svazků okruhů. Protože obraz $i_U(\mathbb{C}_X(U))$ je obsažen v centru $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})(U)$, má $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ strukturu $\mathbb{C}_X$-algebry.

Zvolíme-li za $\mathcal{M}$ strukturní svazek $\mathcal{O}_X$, pak je navíc $\ker i = 0$. Můžeme tedy chápat svazek okruhů $\mathcal{O}_X$ jako podsvazek svazku okruhů $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$. V dalším budeme obvykle ztotožňovat svazek $\mathcal{O}_X$ a jeho obraz $i(\mathcal{O}_X)$.

• Svazek derivací $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$

Definice 1.4. Nechť $U \subset X$ je otevřená množina. Řekneme, že $\theta \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$ je *derivace* na U, jestliže pro každou otevřenou množinu $V \subset U$ platí

$$\theta_V(fg) = \theta_V(f)g + f\theta_V(g) \tag{1.8}$$

pro každé $f, g \in \mathcal{O}_X(V)$. Množinu všech derivací na U budeme značit $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$.

Lemma 1.5.

i) $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$ je $\mathcal{O}_X$-modul.

ii) $[\mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X), \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)] \subset \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$, tj. $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$ je svazek Lieových algeber nad $\mathbb{C}_X$.

Důkaz. i) Snadno se ověří, že $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$ je předsvazek $\mathcal{O}_X$-modulů. Nyní ukážeme, že $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$ je svazek. Mějme otevřenou množinu $U \subset X$ a otevřené pokrytí $U = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Nechť $P, Q \in \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$ splňují $P|_{U_\alpha} = Q|_{U_\alpha}$ pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$. Pak obdržíme $P = Q$, neboť $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$ je svazek a $P, Q \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$. Dále pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$ mějme $P_\alpha \in \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U_\alpha)$ splňující $P_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = P_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Pak existuje $P \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$, takové že $P|_{U_\alpha} = P_\alpha$. Zbývá ukázat, že $P \in \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$. Nechť $V \subset U$ je otevřená množina a $f, g \in \mathcal{O}_X(V)$. Tudíž můžeme psát

$$\begin{aligned} P_V(fg)|_{V_\alpha} &= P_{V_\alpha}(f|_{V_\alpha} g|_{V_\alpha}) = (P_\alpha)_{V_\alpha}(f|_{V_\alpha} g|_{V_\alpha}) = (P_\alpha)_{V_\alpha}(f|_{V_\alpha}) g|_{V_\alpha} + f|_{V_\alpha}(P_\alpha)_{V_\alpha}(g|_{V_\alpha}) \\ &= P_V(f)|_{V_\alpha} g|_{V_\alpha} + f|_{V_\alpha} P_V(g)|_{V_\alpha} = (P_V(f)g + fP_V(g))|_{V_\alpha}, \end{aligned}$$

kde $V_\alpha = V \cap U_\alpha$. Tudíž $P_V(fg) = P_V(f)g + fP_V(g)$, neboť $\mathcal{O}_X$ je svazek a $V = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$ je otevřené pokrytí.

ii) Stačí ukázat, že $[P, Q] \in \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$ pro každé $P, Q \in \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$ Nechť $V \subset U$ je otevřená množin a $f, g \in \mathcal{O}_X(V)$. Pak máme

$$\begin{aligned} [P, Q]_V(fg) = [P_V, Q_V](fg) &= P_V(Q_V(f))g + Q_V(f)P_V(g) + P_V(f)Q_V(g) + fP_V(Q_V(g)) \\ &\quad - Q_V(P_V(f))g - P_V(f)Q_V(g) - Q_V(f)P_V(g) - fQ_V(P_V(g)) \\ &= [P_V, Q_V](f)g + f[P_V, Q_V](g) = [P, Q]_V(f)g + f[P, Q]_V(g), \end{aligned}$$

což znamená, že $[P, Q] \in \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$. ♠

1.2 Svazek holomorfních vektorových polí Θ_X

dodělat

Tečný bandl $TX \to X$ je holomorfní vektorový bandl ranku n ($= \dim X$) nad X. Odpovídající svazek řezů toho bandlu budeme značit Θ_X. Svazek Θ_X je lokálně volný $\mathcal{O}_X$-modul ranku n. Navíc existuje kanonický izomorfismus $\mathcal{O}_X$-modulů

$$\Theta_X \simeq \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X),$$

který definuje na Θ_X strukturu svazku Lieových algeber nad $\mathbb{C}_X$.

1.3 Svazek okruhů lineárních diferenciálních operátorů $\mathcal{D}_X$

Definice 1.6. Nechť $U \subset X$ je otevřená množina a $m \in \mathbb{N}_0$. Řekneme, že $P \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$ je *lineární diferenciální operátor řádu nejvýše* m na U, jestliže pro každou otevřenou množinu $V \subset U$ platí

$$\operatorname{ad}(f_0)\operatorname{ad}(f_1)\dots\operatorname{ad}(f_m)P_V = 0$$

pro každé $f_0, f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_X(V)$, kde $\operatorname{ad}(f)P_V = [P_V, f]$, tj. $[P_V, f](g) = P_V(fg) - fP_V(g)$ pro každé $g \in \mathcal{O}_X(V)$. Množinu všech lineárních diferenciálních operátorů řádu nejvýše m na U budeme značit $F_m\mathcal{D}_X(U)$. Pro $m \in \mathbb{Z}_-$ položíme $F_m\mathcal{D}_X(U) = \{0\}$.

Lemma 1.7.

i) $F_m\mathcal{D}_X$ je $\mathcal{O}_X$-modul.
ii) $F_m\mathcal{D}_X \subset F_{m+1}\mathcal{D}_X$.
iii) $F_0\mathcal{D}_X = i(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X$, $F_1\mathcal{D}_X = i(\mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X \oplus \Theta_X$.
iv) $F_\ell\mathcal{D}_X \circ F_m\mathcal{D}_X \subset F_{\ell+m}\mathcal{D}_X$.
v) $[F_\ell\mathcal{D}_X, F_m\mathcal{D}_X] \subset F_{\ell+m-1}\mathcal{D}_X$.

Důkaz. i) Snadno se ověří, že $F_m\mathcal{D}_X$ je předsvazek $\mathcal{O}_X$-modulů. Nyní ukážeme, že $F_m\mathcal{D}_X$ je svazek. Mějme otevřenou množinu $U \subset X$ a otevřené pokrytí $U = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Nechť $P, Q \in F_m\mathcal{D}_X(U)$ splňují $P|_{U_\alpha} = Q|_{U_\alpha}$ pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$. Pak obdržíme $P = Q$, neboť $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$ je svazek a $P, Q \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$. Dále pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$ mějme $P_\alpha \in F_m\mathcal{D}_X(U_\alpha)$ splňující $P_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = P_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Pak existuje $P \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$, takové že $P|_{U_\alpha} = P_\alpha$. Zbývá ukázat, že $P \in F_m\mathcal{D}_X(U)$. Nechť $V \subset U$ je otevřená množina a $g, f_0, f_1, \dots f_m \in \mathcal{O}_X(V)$. Tudíž můžeme psát

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad}(f_0)\operatorname{ad}(f_1)\dots\operatorname{ad}(f_m)P_V)(g)|_{V_\alpha} &= (\operatorname{ad}(f_0|_{V_\alpha})\operatorname{ad}(f_1|_{V_\alpha})\dots\operatorname{ad}(f_m|_{V_\alpha})P_{V_\alpha})(g|_{V_\alpha})\\ &= (\operatorname{ad}(f_0|_{V_\alpha})\operatorname{ad}(f_1|_{V_\alpha})\dots\operatorname{ad}(f_m|_{V_\alpha})(P_\alpha)_{V_\alpha})(g|_{V_\alpha})\\ &= 0|_{V_\alpha},\end{aligned}$$

kde $V_\alpha = V \cap U_\alpha$. Tudíž $(\operatorname{ad}(f_0)\operatorname{ad}(f_1)\dots\operatorname{ad}(f_m)P_V)(g) = 0$, neboť $\mathcal{O}_X$ je svazek a $V = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$ je otevřené pokrytí.

ii) Plyne ihned z definice.

iii) Nejprve ukážeme, že $F_0\mathcal{D}_X = i(\mathcal{O}_X)$. Nechť $U \subset X$ je otevřená množina a $P \in F_0\mathcal{D}_X(U)$. Pak pro každou otevřenou množinu $V \subset U$ a $f, g \in \mathcal{O}_X(V)$ máme

$$0 = [P_V, f](g) = P_V(fg) - fP_V(g).$$

Zvolíme-li $g = 1$, pak obdržíme $P_V(f) = P_V(1)f$ pro každé $f \in \mathcal{O}_X(V)$. Dále definujeme $h = P_U(1) \in \mathcal{O}_X(U)$. Navíc můžeme psát

$$h|_V = P_U(1)|_V = P_V(1),$$

což znamená, že $P = i_U(h)$. Tím jsme dokázali, že $F_0\mathcal{D}_X(U) \subset i(\mathcal{O}_X)(U)$. Opačná inkluze je však zřejmá.

Nyní dokážeme druhou část tvrzení. Nechť $U \subset X$ je opět otevřená množina a $P \in F_1\mathcal{D}_X(U)$. Pak pro každou otevřenou množinu $V \subset U$ a $f, g, h \in \mathcal{O}_X(V)$ máme

$$0 = [[P_V, f], g](h) = [P_V, f](gh) - g[P_V, f](h).$$

Zvolíme-li $h = 1$, pak obdržíme $[P_V, f](g) = \theta_V(f)g$, kde $\theta_V = [P_V, f](1) \in \mathcal{O}_X(V)$. Dále máme

$$\theta_V(f_1f_2)g = [P_V, f_1f_2](g) = [P_V, f_1](f_2g) + f_1[P_V, f_2](g) = \theta_V(f_1)f_2g + f_1\theta_V(f_2)g,$$

což znamená, že $\theta_V \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}_X(V)}(\mathcal{O}_X(V))$. Pro každou otevřenou množinu $W \subset V$ máme

$$\begin{aligned}\theta_V(f)|_W g|_W = [P_V, f](g)|_W = P_V(fg)|_W - f|_W P_V(g)|_W &= P_W(f|_W g|_W) - f|_W P_W(g|_W)\\ &= [P_W, f|_W](g|_W) = \theta_W(f|_W)g|_W,\end{aligned}$$

tudíž $\theta \in \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$. Dále může psát

$$(\mathrm{ad}(f)(P_V - \theta_V))(g) = [P_V - \theta_V, f](g) = [P_V, f](g) - [\theta_V, f](g) = \theta_V(f)g - \theta_V(fg) + f\theta_V(g) = 0,$$

což ale dle předchozí části tvrzení znamená, že existuje $f \in \mathcal{O}_X(U)$ splňující $P = i_U(f) + \theta$. Nyní zbývá už je ukázat, že $i(\mathcal{O}_X)(U) \cap \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U) = \{0\}$. Pokud $P \in i(\mathcal{O}_X)(U) \cap \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$, pak $P = i_U(f)$ a zároveň lze psát

$$f|_V g = P_V(g) = P_V(g \cdot 1) = P_V(g)1 + gP_V(1) = f|_V g + f|_V g$$

pro každé $g \in \mathcal{O}_X(V)$. Tedy obdržíme $f = 0$. Tím jsme dokázali, že $F_1\mathcal{D}_X(U) \subset i(\mathcal{O}_X)(U) \oplus \mathcal{D}er_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(U)$. Opačná inkluze je však zřejmá.

iv) Pro $k \in \mathbb{N}_0$ a otevřenou množinu $V \subset X$ definujme

$$D_k(\mathcal{O}_X(V)) = \{P \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}_X(V)}(\mathcal{O}_X(V));\ \mathrm{ad}(f_0)\dots\mathrm{ad}(f_k)P = 0,\ \forall f_0,\dots,f_k \in \mathcal{O}_X(V)\}. \quad \text{(S)}$$

Nejprve ukážeme, že $D_\ell(\mathcal{O}_X(V)) \circ D_m(\mathcal{O}_X(V)) \subset D_{\ell+m}(\mathcal{O}_X(V))$. Dokážeme to indukcí podle $\ell + m$. Pro $\ell + m = 0$ je tvrzení zřejmé. Dále můžeme psát

$$\mathrm{ad}(f)(P \circ Q) = [P \circ Q, f] = [P, f] \circ Q + P \circ [Q, f].$$

Z indukčního předpokladu plyne, že operátor na pravé straně má řád nejvýše $\ell + m - 1$, čímž je tvrzení dokázáno.

Máme ukázat, že $P \circ Q \in F_{\ell+m}\mathcal{D}_X(U)$ pro každé $P \in F_\ell\mathcal{D}_X(U)$ a $Q \in F_m\mathcal{D}_X(U)$. Nechť $V \subset X$ je otevřená množina, pak $P_V \in D_\ell(\mathcal{O}_X(V))$ a $Q \in D_m(\mathcal{O}_X(V))$. Tedy $(P \circ Q)_V = P_V \circ Q_V \in D_{\ell+m}(\mathcal{O}_X(V))$, čímž je tvrzení dokázáno.

v) Nejprve ukážeme, že $[D_\ell(\mathcal{O}_X(V)), D_m(\mathcal{O}_X(V))] \subset D_{\ell+m-1}(\mathcal{O}_X(V))$. Dokážeme to indukcí podle $\ell + m$. Pro $\ell + m = 0$ je tvrzení zřejmé. Dále můžeme psát

$$\mathrm{ad}(f)([P, Q]) = [[P, Q], f] = [[P, f], Q] + [P, [Q, f]].$$

Z indukčního předpokladu plyne, že operátor na pravé straně má řád nejvýše $\ell + m - 2$, čímž je tvrzení dokázáno.

Máme ukázat, že $[P, Q] \in F_{\ell+m}\mathcal{D}_X(U)$ pro každé $P \in F_\ell\mathcal{D}_X(U)$ a $Q \in F_m\mathcal{D}_X(U)$. Nechť $V \subset X$ je otevřená množina, pak $P_V \in D_\ell(\mathcal{O}_X(V))$ a $Q \in D_m(\mathcal{O}_X(V))$. Tedy $[P, Q]_V = [P_V, Q_V] \in D_{\ell+m-1}(\mathcal{O}_X(V))$, čímž je tvrzení dokázáno. ♠

Definice 1.8. Svazek okruhů lineárních diferenciálních operátorů $\mathcal{D}_X$ na komplexní varietě X definujeme vztahem

$$\mathcal{D}_X = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} F_m\mathcal{D}_X, \tag{1.9}$$

tj. jako svazek okruhů asociovaný k předsvazku okruhů $\cup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\mathcal{D}_X$.

Z lemmatu 1.7 ihned vyplývá, že systém $\{F_m\mathcal{D}_X\}_{m\in\mathbb{Z}}$ je filtrace na $\mathcal{D}_X$.

1.4 Lokální popis $F_m\mathcal{D}_X$

Nechť (U, u) je lokální mapa na X a nechť $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou odpovídající lokální souřadnicové funkce. Pak pro $i = 1, 2, \dots, n$ definujeme morfismus $\partial_i = \partial_{x_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U)$ předpisem

$$f \in \mathcal{O}_X(V) \mapsto \{x \mapsto \partial_{y_i}(f \circ u^{-1})(u(x))\} \in \mathcal{O}_X(V) \tag{1.10}$$

pro každou otevřenou podmnožinu $V \subset U$. Přímo z definice snadno ověříme, že $\partial_{x_i} \in F_1\mathcal{D}_X(U)$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Označení. Pro každý multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ definujeme

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \dots \alpha_n!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Dále pak pro multiindexy $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definujeme $\alpha \leq \beta$, pokud $\alpha_i \leq \beta_i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$, a

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!\, \beta!}$$

pro $\beta \leq \alpha$.

Lemma 1.9. Nechť $V \subset U$ je otevřená podmnožina a $f \in \mathcal{O}_X(V)$, pak

i) $[\partial_{x_i}, i_V(f)] = i_V(\partial_{x_i}(f))$,
ii) $[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0$,
iii) $\partial^\alpha \cdot i_V(f) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} i_V(\partial^\beta(f)) \cdot \partial^{\alpha-\beta}$,
iv) $i_V(f) \cdot \partial^\alpha = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\beta|} \partial^{\alpha-\beta} \cdot i_V(\partial^\beta(f))$.

Důkaz. i) Nechť $W \subset V$ je otevřená podmnožina. Pak máme

$$[\partial_{x_i}|_V, i_V(f)]_W(g) = (\partial_{x_i})_W(f|_W g) - f|_W(\partial_{x_i})_W(g) = (\partial_{x_i})_W(f|_W)g = (i_V(\partial_{x_i}|_V(f)))_W(g)$$

pro každé $g \in \mathcal{O}_X(W)$.

ii)Nechť $W \subset V$ je otevřená podmnožina. Můžeme tedy psát

$$[\partial_{x_i}|_V, \partial_{x_j}|_V]_W(g) = (\partial_{x_i})_W((\partial_{x_j})_W(g)) - (\partial_{x_j})_W((\partial_{x_i})_W(g)) = 0$$

pro každé $g \in \mathcal{O}_X(W)$.

Tvrzení (iii) a (iv) lze například dokázat s využitím vlastnosti (i). ♠

Nechť (U, u) je lokální mapa na X a nechť $V \subset U$ je otevřená podmnožina. Potom podokruh $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)(V)$ generovaný $i_V(\mathcal{O}_X(V))$ a $\partial_{x_1}|_V, \partial_{x_2}|_V, \dots, \partial_{x_n}|_V$ označíme $D_U(V)$. V dalším pak ukážeme, že

$$D_U(V) = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m\mathcal{D}_X(V). \tag{1.11}$$

Z předchozího lemmatu plyne, že každý element $P \in D_U(V)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$P(x, \partial) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} i_V(a_\alpha) \cdot \partial^\alpha, \tag{1.12}$$

kde $a_\alpha \in \mathcal{O}_X(V)$, přičemž jen konečně mnoho a_α je nenulových. Dané vyjádření se nazývá *standardní forma reprezentace lineárního diferenciálního operátoru P*.

Lemma 1.10. Standardní forma reprezentace lineárního diferenciálního operátoru je jednoznačná, tj.

$$D_U(V) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} i_V(\mathcal{O}_X(V)) \cdot \partial^\alpha \tag{1.13}$$

pro každou otevřenou podmnožinu $V \subset U$.

Důkaz. Nechť $P(x,\partial) = \sum i_V(a_\alpha) \cdot \partial^\alpha$, kde alespoň nějaké a_α je nenulové. Nechť k je nejmenší nezáporné celé číslo takové, že existuje multiindex α splňující $a_\alpha \neq 0$ a $|\alpha| = k$. Uvažujme element $\mathcal{O}_X(V)$ ve tvaru $f = x^\alpha$. Jestliže $\beta \neq \alpha$ a $|\beta| \geq k$, pak máme $\partial^\beta(f) = 0$. Obdržíme tedy

$$P(x,\partial)(f) = \alpha! \cdot a_\alpha,$$

což znamená, že $P(x,\partial) \neq 0$. ♠

Lemma 1.11. Pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ definujeme

$$F_m D_U(V) = \sum_{|\alpha| \leq m} i_V(\mathcal{O}_X(V)) \cdot \partial^\alpha. \tag{1.14}$$

a pro $m \in \mathbb{Z}_-$ položme $F_m D_U(V) = \{0\}$. Pak $\{F_m D_X(V)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ je filtrace okruhu $D_U(V)$.

Důkaz. Plyne z lemmatu 1.9. ♠

Z předchozího ihned plyne, že svazek $F_m D_U$ je volný $\mathcal{O}_X|_U$-modul konečného ranku a navíc $F_m D_U$ je $\mathcal{O}_X|_U$-podmodul $F_m \mathcal{D}_X|_U$.

Pro každé $m \geq 0$ označíme $T_m(V)$ množinu polynomů v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stupně nejvýše m. Tedy $T_m(V)$ je konečně dimenzionální komplexní vektorový podprostor $\mathcal{O}_X(V)$. Každý operátor $P \in \cup F_m \mathcal{D}_X(V)$ dává $\mathbb{C}$-lineární zobrazení z $T_m(V)$ do $\mathcal{O}_X(V)$. Máme tedy $\mathbb{C}$-lineární zobrazení $j_m(V)\colon \cup F_m \mathcal{D}_X(V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_m(V), \mathcal{O}_X(V))$.

Lemma 1.12. Zobrazení $j_m(V)\colon F_m D_U(V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_m(V), \mathcal{O}_X(V))$ je izomorfismus komplexních vektorových prostorů.

Důkaz. Polynomy $\{x^\alpha;\ |\alpha| \leq m\}$ tvoří bázi $T_m(V)$. Tudiž $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_m(V), \mathcal{O}_X(V))$ je volný $\mathcal{O}_X(V)$-modul konečného ranku s generátory $\{e_\alpha;\ |\alpha| \leq m\}$ definovanými vztahy

$$e_\alpha(x^\beta) = \delta_{\alpha\beta},$$

kde δ je Kroneckerovo delta. Je zřejmé, že

$$j_m(V)(\partial^\alpha) = \sum_{\alpha \leq \beta} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} x^{\beta-\alpha} \cdot e_\beta.$$

Odtud plyne, že $j_m(V)$ je surjektivní. Injektivita plyne z důkazu lemmatu 1.10. ♠

Lemma 1.13. Nechť $P \in \cup F_m \mathcal{D}_X(V)$ a splňuje $P(1) = 0$ a $[P, i_V(x_j)] = 0$ pro každé $1 \leq j \leq n$. Pak platí $P = 0$.

Důkaz. Pro každé $a \in V$ diferenciální operátor P definuje $\mathbb{C}$-lineární zobrazení $P_a\colon \mathcal{O}_{X,a} \to \mathcal{O}_{X,a}$ splňující $P_a(1) = 0$ a $[P_a, x_j] = 0$ pro každé $1 \leq j \leq n$. Jelikož P_a a x_j komutují, máme

$$P_a(x_j g) = x_j P_a(g)$$

pro každé $g \in \mathcal{O}_{X,a}$. Poněvadž $P_a(1) = 0$, plyne z předchozí relace, že $\ker P_a$ je $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ podmodul $\mathcal{O}_{X,a}$ obsahující polynomiální okruh $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Dále nechť $\mathfrak{m}_a$ je maximální ideál lokálního okruhu $\mathcal{O}_{X,a}$. Pak pro $v \geq 1$ platí

$$\mathfrak{m}_a^{v+1} = (x_1 - a_1)\mathfrak{m}_a^v + (x_2 - a_2)\mathfrak{m}_a^v + \cdots + (x_n - a_n)\mathfrak{m}_a^v$$

a pro $v = 0$ máme

$$\mathfrak{m}_a = (x_1 - a_1)\mathcal{O}_{X,a} + (x_2 - a_2)\mathcal{O}_{X,a} + \cdots + (x_n - a_n)\mathcal{O}_{X,a}.$$

Můžeme tedy psát

$$P_a(\mathfrak{m}_a) \subset (x_1 - a_1)P_a(\mathcal{O}_{X,a}) + (x_2 - a_2)P_a(\mathcal{O}_{X,a}) + \cdots + (x_n - a_n)P_x(\mathcal{O}_{X,a}),$$

což znamená, že $P_a(\mathfrak{m}_a) \subset \mathfrak{m}_a$. Dále máme

$$P_a(\mathfrak{m}_a^{v+1}) \subset (x_1 - a_1)P_a(\mathfrak{m}_a^v) + (x_2 - a_2)P_a(\mathfrak{m}_a^v) + \cdots + (x_n - a_n)P_a(\mathfrak{m}_a^v).$$

Indukcí podle v obdržíme $P_a(\mathfrak{m}_a^v) \subset \mathfrak{m}_a^v$. Mějme $f \in \mathcal{O}_{X,a}$ a uvažujme Taylorův polynom

$$S_v f = \sum_{|\alpha| \leq v} c_\alpha\,(x-a)^\alpha$$

pro každé $v \geq 0$. Pak $f - S_v f \in \mathfrak{m}_a^{v+1}$ a polynom $S_v f$ je prvkem $\ker P_a$. Tudíž obdržíme, že $P_a(f) \in \mathfrak{m}_a^{v+1}$. Jelikož $\cap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_a^k = \{0\}$, obdržíme $P_a(f) = 0$, tedy $\ker P_a = \mathcal{O}_{X,a}$. Protože $P_a = 0$ pro každé $a \in V$, máme $P = 0$, což jsme chtěli ukázat. ♠

Lemma 1.14. Pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ platí $F_m D_U(V) = F_m \mathcal{D}_X(V)$.

Důkaz. Již víme, že $F_m D_U(V) \subset F_m \mathcal{D}_X(V)$. Nyní dokážeme, že

$$j_m(V) \colon F_m \mathcal{D}_X(V) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(T_m(V), \mathcal{O}_X(V))$$

je injektivní zobrazení. Pro $j_0(V)$ je tvrzení zřejmé. Nechť je $m > 0$ a předpokládejme, že $j_{m-1}(V)$ je injektivní. Mějme tedy $P \in F_m \mathcal{D}_X(V)$, takové že splňuje $j_m(V)(P) = 0$. Můžeme tedy psát

$$j_{m-1}(V)([P, i_V(x_k)](\varphi) = P(x_k\varphi) - x_k P(\varphi) = 0$$

pro každé $\varphi \in T_{m-1}(V)$. Indukční předpoklad dává, že $[P, i_V(x_k)] = 0$ pro každé $1 \leq k \leq n$. Jelikož $1 \in T_m(V)$, plyne že $P(1) = 0$. Z lemmatu 1.13 dostaneme, že $P = 0$, tudíž $j_m(V)$ je injektivní. Nyní nechť $P \in F_m \mathcal{D}_X(V)$, pak dle lemmatu 1.12 existuje $Q \in F_m D_U(V)$ splňující $j_m(V)(P) = j_m(V)(Q)$. Tedy $j_m(V)(P - Q) = 0$, a proto $P = Q$, což znamená, že $F_m D_U(V) = F_m \mathcal{D}_X(V)$. ♠

Věta 1.15. Svazek $F_m \mathcal{D}_X$ je lokálně volný $\mathcal{O}_X$-modul konečného ranku $r_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k}$.

Důkaz. Z lemmatu 1.14 plyne, že $F_m D_U(V) = F_m \mathcal{D}_X(V)$ pro každou otevřenou podmnožinu $V \subset U$, což implikuje rovnost $F_m D_U = F_m \mathcal{D}_X|_U$. Z předešlých úvah dále víme, že $F_m D_U$ je volný $\mathcal{O}_X|_U$-modul konečného ranku. Tudíž $F_m \mathcal{D}_X$ je lokálně volný $\mathcal{O}_X$-modul konečného ranku. ♠

1.5 Vlastnosti strukturního svazku $\mathcal{O}_X$

Věta 1.16. (Oka coherence theorem) Nechť X je komplexní varieta. Pak svazek okruhů holomorfních funkcí $\mathcal{O}_X$ je koherentní svazek okruhů.

Důkaz. ♠

Věta 1.17. Nechť X je komplexní varieta a nechť $\mathcal{F}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul. Pak $\mathcal{F}$ je lokálně volný $\mathcal{O}_X$-modul konečného ranku, právě tehdy když $\mathcal{F}_x$ je volný $\mathcal{O}_{X,x}$-modul pro každé $x \in X$.

Důkaz. ♠

1.6 Systém generátorů $\mathcal{D}_X$

Lemma 1.18. Nechť $\mathcal{R}$ je $\mathbb{C}_X$-algebra a nechť $i \colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{R}$ a $\varphi \colon \Theta_X \to \mathcal{R}$ jsou morfismy $\mathbb{C}_X$-modulů splňující

(i) $i \colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{R}$ je morfismus svazků okruhů,

(ii) $\varphi \colon \Theta_X \to \mathcal{R}$ je morfismus levých $\mathcal{O}_X$-modulů (struktura levého $\mathcal{O}_X$-modulu na $\mathcal{R}$ je dána prostřednictvím (i)),

(iii) $\varphi\colon \Theta_X \to \mathcal{R}$ je morfismus svazků Lieových algeber nad $\mathbb{C}_X$ (struktura svazku Lieových algeber nad $\mathbb{C}_X$ je na $\mathcal{R}$ dána komutátorem),

(iv) $[\varphi(\xi), i(f)] = i(\xi(f))$ pro každé $\xi \in \Theta_X(U)$ a $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Pak existuje jediný morfismus $\mathbb{C}_X$-algeber $\Phi\colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{R}$, takový že $\mathcal{O}_X \xrightarrow{j} \mathcal{D}_X \xrightarrow{\Phi} \mathcal{R}$ splývá s i a $\Theta_X \to \mathcal{D}_X \xrightarrow{\Phi} \mathcal{R}$ splývá s φ.

Důkaz. Předsvazek $\mathbb{C}_X$-algeber $\cup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\mathcal{D}_X$ označme $\mathcal{F}$. Nechť $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ je holomorfní atlas na X. Pak pro každou otevřenou množinu U_α definujeme morfismus předsvazků $\mathbb{C}_X$-algeber $\Psi_\alpha\colon \mathcal{F}|_{U_\alpha} \to \mathcal{R}|_{U_\alpha}$ předpisem

$$(\Psi_\alpha)_V(P) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^n} i_V(a_\gamma)\varphi_V(\partial_{x_1^\alpha})^{\gamma_1}\varphi_V(\partial_{x_2^\alpha})^{\gamma_2}\dots\varphi(\partial_{x_n^\alpha})^{\gamma_n}$$

pro každou otevřenou množinu $V \subset U_\alpha$ a $P \in \mathcal{F}(V)$, přičemž

$$P = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^n} j_V(a_\gamma)(\partial_{x_1^\alpha})^{\gamma_1}(\partial_{x_2^\alpha})^{\gamma_2}\dots(\partial_{x_n^\alpha})^{\gamma_n}$$

je standardní forma reprezentace lineárního diferenciálního operátoru P. Máme tudíž, že $\Psi_\alpha \in \mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U_\alpha)$. V dalším ukážeme, že

$$\Psi_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = \Psi_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$$

pro každé $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Mějme tedy otevřenou množinu $V \subset U_\alpha \cap U_\beta$ a $P \in \mathcal{F}(V)$, pak můžeme psát

$$P = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^n} j_V(a_\gamma)(\partial_{x_1^\alpha})^{\gamma_1}(\partial_{x_2^\alpha})^{\gamma_2}\dots(\partial_{x_n^\alpha})^{\gamma_n} = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^n} j_V(b_\gamma)(\partial_{x_1^\beta})^{\gamma_1}(\partial_{x_2^\beta})^{\gamma_2}\dots(\partial_{x_n^\beta})^{\gamma_n}.$$

Obdržíme tedy, že

$$(\Psi_\alpha)_V(P) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^n} i_V(a_\gamma)\varphi_V(\partial_{x_1^\alpha})^{\gamma_1}\varphi_V(\partial_{x_2^\alpha})^{\gamma_2}\dots\varphi_V(\partial_{x_n^\alpha})^{\gamma_n}$$

a zároveň

$$(\Psi_\beta)_V(P) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^n} i_V(b_\gamma)\varphi_V(\partial_{x_1^\beta})^{\gamma_1}\varphi_V(\partial_{x_2^\beta})^{\gamma_2}\dots\varphi_V(\partial_{x_n^\beta})^{\gamma_n}.$$

Jelikož však platí, že

$$\partial_{x_i^\beta} = j_V(\partial_{x_i^\beta}(x_j^\alpha))\,\partial_{x_j^\alpha},$$

snadno ověříme rovnost $(\Psi_\alpha)_V(P) = (\Psi_\beta)_V(P)$. Protože $\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{F},\mathcal{R})$ je svazek, existuje jediný morfismus $\Psi \in \mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{F},\mathcal{R})(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ splňující $\Psi|_{U_\alpha} = \Psi_\alpha$ pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$. Dále jelikož $\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{F},\mathcal{R}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{D}_X,\mathcal{R})$, obdržíme morfismus $\mathbb{C}_X$-algebra $\Phi\colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{R}$. Snadno se ověří, že $\mathcal{O}_X \to \mathcal{D}_X \to \mathcal{R}$ splývá s i a $\Theta_X \to \mathcal{D}_X \to \mathcal{R}$ splývá s φ. Jednoznačnost morfismu Φ splňujícího dané vlastnosti plyne přímo z konstrukce. ♠

1.7 Levé a pravé $\mathcal{D}_X$-moduly

Kategorii levých $\mathcal{D}_X$-modulů budeme značit $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ a kategorii pravých $\mathcal{D}_X$-modulů budeme značit $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X{}^{\mathrm{op}})$. Kategorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ a $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X{}^{\mathrm{op}})$ jsou abelovské kategorie.

Máme následující velmi jednoduchou (ale užitečnou) interpretaci pojmu levého $\mathcal{D}_X$-modulu.

Lemma 1.19. Nechť $\mathcal{M}$ je $\mathcal{O}_X$-modul. Zadání struktury levého $\mathcal{D}_X$-modulu na $\mathcal{M}$ rozšiřující strukturu $\mathcal{O}_X$-modulu je ekvivalentní zadání morfismu $\mathbb{C}_X$-modulů

$$\nabla\colon \Theta_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M}) \quad (\xi \mapsto \nabla_\xi) \tag{1.15}$$

splňujícího

(i) $\nabla_{f\xi}(s) = f\nabla_\xi(s) \qquad (f \in \mathcal{O}_X(U),\, \xi \in \Theta_X(U),\, s \in \mathcal{M}(U))$,
(ii) $\nabla_\xi(fs) = \xi(f)s + f\nabla_\xi(s) \qquad (f \in \mathcal{O}_X(U),\, \xi \in \Theta_X(U),\, s \in \mathcal{M}(U))$,
(iii) $[\nabla_{\xi_1}, \nabla_{\xi_2}](s) = \nabla_{[\xi_1,\xi_2]}(s) \qquad (\xi_1, \xi_2 \in \Theta_X(U),\, s \in \mathcal{M}(U))$.

Struktura levého $\mathcal{D}_X$-modulu na $\mathcal{M}$ je pak dána vztahem

$$\xi \cdot s = \nabla_\xi(s),$$

kde $s \in \mathcal{M}(U)$ a $\xi \in \Theta_X(U)$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{M}$ má strukturu levého $\mathcal{D}_X$-modulu, jež rozšiřuje strukturu $\mathcal{O}_X$-modulu. Definujme morfismus $\mathbb{C}_X$-algeber $\Phi\colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ vztahem

$$P \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}(V) \xrightarrow{(\Phi_U(P))_V} \mathcal{M}(V) \\ s \mapsto P|_V \cdot s \end{array} \right\},$$

kde $P \in \mathcal{D}_X(U)$. Snadno se ověří, že morfismus $\mathbb{C}_X$-modulů $\Theta_X \to \mathcal{D}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ splňuje podmínky (i)–(iii).

Na druhou stranu struktura $\mathcal{O}_X$-modulu na $\mathcal{M}$ zadává vztahem (1.7) morfismus svazků okruhů $i\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$, který je $\mathbb{C}_X$-lineární. Označíme-li navíc $\mathcal{R} = \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$, pak morfismy i a ∇ splňují předpoklady lemmatu 1.18. Tudíž existuje jediný morfismus $\mathbb{C}_X$-algeber $\Phi\colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$, takový že $\mathcal{O}_X \to \mathcal{D}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ splývá s i a $\Theta_X \to \mathcal{D}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ splývá s ∇. Jelikož $\mathcal{M}$ je levý $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$-modul, je současně i levý $\mathcal{D}_X$-modul. ♠

Podmínka (iii) se nazývá *podmínka integrability* na $\mathcal{M}$. Pro lokálně volný levý $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{M}$ konečného ranku se $\mathbb{C}_X$-lineární morfismus $\nabla\colon \Theta_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ splňující podmínky (i) a (ii) obvykle nazývá *konexe* (na odpovídajícím holomorfním vektorovém bandlu). Jestliže také splňuje podmínku (iii), nazývá se *integrabilní* (nebo *plochá*) *konexe*. Tudíž můžeme chápat levé $\mathcal{D}_X$-moduly jako integrabilní konexe na $\mathcal{O}_X$-modulech, které nejsou nutně lokálně volné konečného ranku.

Definice 1.20. Řekneme, že levý $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M}$ je *integrabilní konexe* na X, jestliže $\mathcal{M}$ je lokálně volný $\mathcal{O}_X$-modul konečného ranku. Dále definujeme kategorii $\mathrm{Con}(\mathcal{D}_X)$ (kategorie integrabilních konexí na X) jako úplnou podkategorii $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ sestávající z integrabilních konexí na X.

Integrabilní konexe jsou nejjednoduššími příklady levých $\mathcal{D}_X$-modulů. Nicméně jsou obzvlášť důležité, neboť generují (v kategoriálním smyslu) kategorii holonomních systémů, jak uvidíme později.

Příklad. (Obyčejné diferenciální rovnice.) Uvažujme obyčejný diferenciální operátor

$$P = a_m \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_0,$$

kde $a_i \in \mathcal{O}_\mathbb{C}$, na $\mathbb{C}$ a odpovídající $\mathcal{D}_\mathbb{C}$-modul $\mathcal{M} = \mathcal{D}_\mathbb{C}/\mathcal{D}_\mathbb{C}P$. Označme $U = \{x \in \mathbb{C};\, a_m(x) \neq 0\}$, pak $\mathcal{M}|_U$ je lokálně volný $\mathcal{O}_\mathbb{C}|_U$-modul ranku m, tudíž $\mathcal{M}|_U$ je integrabilní konexe na U.

Lemma 1.21. Nechť $\mathcal{M}$ je $\mathcal{O}_X$-modul. Zadání struktury pravého $\mathcal{D}_X$-modulu na $\mathcal{M}$ rozšiřující strukturu $\mathcal{O}_X$-modulu je ekvivalentní zadání morfismu $\mathbb{C}_X$-modulů

$$\nabla\colon \Theta_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M}) \quad (\xi \mapsto \nabla_\xi) \tag{1.16}$$

splňujícího

(i) $\nabla_{f\xi}(s) = \nabla_\xi(fs) \qquad (f \in \mathcal{O}_X(U),\, \xi \in \Theta_X(U),\, s \in \mathcal{M}(U))$,
(ii) $\nabla_\xi(fs) = -\xi(f)s + f\nabla_\xi(s) \qquad (f \in \mathcal{O}_X(U),\, \xi \in \Theta_X(U),\, s \in \mathcal{M}(U))$,
(iii) $[\nabla_{\xi_1}, \nabla_{\xi_2}](s) = -\nabla_{[\xi_1,\xi_2]}(s) \qquad (\xi_1, \xi_2 \in \Theta_X(U),\, s \in \mathcal{M}(U))$.

Struktura pravého $\mathcal{D}_X$-modulu na $\mathcal{M}$ je pak dána vztahem

$$s \cdot \xi = \nabla_\xi(s),$$

kde $s \in \mathcal{M}(U)$ a $\xi \in \Theta_X(U)$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{M}$ má strukturu pravého $\mathcal{D}_X$-modulu, jež rozšiřuje strukturu $\mathcal{O}_X$-modulu. Definujme morfismus $\mathbb{C}_X$-algeber $\Phi\colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}}$ vztahem

$$P \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}(V) \xrightarrow{(\Phi_U(P))_V} \mathcal{M}(V) \\ s \mapsto s \cdot P|_V \end{array} \right\},$$

kde $P \in \mathcal{D}_X(U)$. Snadno se ověří, že morfismus $\mathbb{C}_X$-modulů $\Theta_X \to \mathcal{D}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ splňuje podmínky (i)–(iii).

Na druhou stranu struktura $\mathcal{O}_X$-modulu na $\mathcal{M}$ zadává vztahem (1.7) morfismus svazků okruhů $i\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}}$, který je $\mathbb{C}_X$-lineární. Označíme-li navíc $\mathcal{R} = \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}}$, pak morfismy i a ∇ splňují předpoklady lemmatu 1.18. Tudíž existuje jediný morfismus $\mathbb{C}_X$-algeber $\Phi\colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}}$, takový že $\mathcal{O}_X \to \mathcal{D}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}}$ splývá s i a $\Theta_X \to \mathcal{D}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}}$ splývá s ∇. Jelikož $\mathcal{M}$ je pravý $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}}$-modul, je současně i pravý $\mathcal{D}_X$-modul. ♠

• Levý $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{O}_X$

Strukturní svazek $\mathcal{O}_X$ komplexní variety X je nejjednodušším příkladem levého $\mathcal{D}_X$-modulu. Jelikož $\mathcal{O}_X$ má kanonickou strukturu levého $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$-modulu a jelikož svazek okruhů $\mathcal{D}_X$ je podsvazek svazku okruhů $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$, má svazek $\mathcal{O}_X$ také přirozenou strukturu levého $\mathcal{D}_X$-modulu. Navíc máme exaktní posloupnost levých $\mathcal{D}_X$-modulů

$$\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Theta_X \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{D}_X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0, \tag{1.17}$$

kde $\delta^1(P \otimes \xi) = P\xi$ pro každé $P \in \mathcal{D}_X(U)$ a $\xi \in \Theta_X(U)$. Morfismus φ je definován vztahem $\varphi(P) = P(1_U)$ pro všechna $P \in \mathcal{D}_X(U)$. Později ukážeme, že existuje lokálně volná rezoluce

$$0 \to \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^n\Theta_X \to \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{n-1}\Theta_X \to \cdots \to \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Theta_X \to \mathcal{D}_X \to \mathcal{O}_X \to 0, \tag{1.18}$$

kde $n = \dim X$, levého $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{O}_X$.

• Lieova derivace, vnitřní derivace a vnější derivace

Uvažujme svazek holomorfních vektorových polí Θ_X na komplexní varietě X. Pro každé $p \geq 0$ můžeme definovat svazek Θ_X^p holomorfních p-vektorových polí na X a svazek Ω_X^p holomorfních p-forem na X. Svazek Θ_X^p definujeme vztahem $\Theta_X^p = \Lambda^p\Theta_X$ a svazek Ω_X^p definujeme předpisem $\Omega_X^p = \Lambda^p\,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X, \mathcal{O}_X)$. Jelikož Θ_X je lokálně volný $\mathcal{O}_X$-modul ranku $n = \dim X$, jsou i svazky Θ_X^p a Ω_X^p lokálně volné $\mathcal{O}_X$-moduly konečného konstantního ranku, tj. holomorfní vektorové bandly. Pro $p < 0$ položíme $\Theta_X^p = 0$ a $\Omega_X^p = 0$. Dále existuje kanonický izomorfismus $\mathcal{O}_X$-modulů

$$\Omega_X^p \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X^p, \mathcal{O}_X). \tag{1.19}$$

Pro $p = 0$ a $p = n$ je Ω_X^p lokálné volný $\mathcal{O}_X$-modul ranku 1 (line bundle). Svazek Ω_X^0 je roven strukturnímu svazku $\mathcal{O}_X$ (structure sheaf), svazek Ω_X^n budeme značit ω_X a nazývá se *kanonický svazek* (canonical sheaf).

Ekvivalentně lze svazek Θ_X^p respektive Ω_X^p definovat jako svazek řezů holomorfního vektorového bandlu $\Lambda^pTX \to X$ respektive $\Lambda^pT^*X \to X$.

Definujme $\mathcal{O}_X$-modul

$$\Omega_X^\bullet = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \Omega_X^p, \tag{1.20}$$

pak svazek holomorfních vektorových polí Θ_X má dvě akce na $\Omega_X^\bullet$. Jednak je to *vnitřní derivace* $i\colon \Theta_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\Omega_X^\bullet)$, která je definována vztahem

$$(i_\xi(\omega))(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}) = \omega(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}), \tag{1.21}$$

kde $\omega \in \Omega_X^p(U)$ a $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1} \in \Theta_X(U)$, pro $p > 0$ a vztahem

$$i_\xi(f) = 0, \tag{1.22}$$

kde $f \in \Omega_X^0(U)$ a $\xi \in \Theta_X(U)$, pro $p = 0$. Tudíž i je operátor (stupně -1) z Ω_X^p do Ω_X^{p-1}.

Naproti tomu *Lieova derivace* $L\colon \Theta_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\Omega_X^\bullet)$ je definována vztahem

$$(L_\xi(\omega))(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = \xi(\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)) - \sum_{i=1}^{p} \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, [\xi, \xi_i], \xi_{i+1}, \ldots, \xi_p), \tag{1.23}$$

kde $\omega \in \Omega_X^p(U)$ a $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_p \in \Theta_X(U)$. Tudíž L je operátor (stupně 0) z Ω_X^p do Ω_X^p.

Lemma 1.22.

i) $[i_{\xi_1}, i_{\xi_2}] = 0$.
ii) $[L_{\xi_1}, L_{\xi_2}] = L_{[\xi_1, \xi_2]}$.
iii) $[L_{\xi_1}, i_{\xi_2}] = i_{[\xi_1, \xi_2]}$.
iv) $L_\xi \circ d - d \circ L_\xi = 0$.
v) $i_\xi \circ d + d \circ i_\xi = L_\xi$.

Důkaz. ♠

• Pravý $\mathcal{D}_X$-modul ω_X

1.8 Příklady $\mathcal{D}_X$-modulů

1) Svazek okruhů lineárních diferenciálních operátorů $\mathcal{D}_X$ má kanonickou strukturu levého i pravého $\mathcal{D}_X$-modulu, dokonce má strukturu $(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$-bimodulu.

2) Nechť $\mathcal{F}$ je $\mathcal{O}_X$-modul, pak $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ je levý $\mathcal{D}_X$-modul.

3) Nechť P je nenulový lineární diferenciální operátor řádu m na X, tj. $P \in F_m\mathcal{D}_X(X)$. Uvažujme levý $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$, pak dostaneme exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X \xrightarrow{\Phi_P} \mathcal{D}_X \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

levých $\mathcal{D}_X$-modulů, kde morfismus Φ_P je definován vztahem

$$\Phi_P(Q) = QP|_U \qquad Q \in \mathcal{D}_X(U).$$

Jelikož $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bullet, \mathcal{O}_X)\colon \operatorname{Mod}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \to \operatorname{Mod}(\mathbb{C}_X)$ je levý exaktní funktor, obržíme exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X)$$

levých $\mathbb{C}_X$-modulů. Dále snadno nahlédneme, že morfismus

$$\varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X)(U) \mapsto \varphi_U(1_U) \in \mathcal{O}_X(U)$$

je izomorfismus

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X$$

levých $\mathbb{C}_X$-modulů. Tudíž předchozí exaktní posloupnost můžeme psát ve tvaru

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X,$$

odkud již plyne, že $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \simeq \ker P$.

4) Nechť $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}[\star\{0\}]$ je svazek meromorfních funkcí na $\mathbb{C}$ mající pól v bodě $0 \in \mathbb{C}$. Pak $\mathcal{O}_C[\star\{0\}]$ má přirozenou strukturu $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-modulu. Navíc máme exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\psi} \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}[\star\{0\}] \longrightarrow 0$$

levých $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-modulů, kde $\psi(Q) = Q \cdot (x\partial_x + 1)|_U$ pro $Q \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U)$ a $\varphi(P) = P(\frac{1}{x})$ pro $P \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U)$. Obdobně máme exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\psi} \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}[\star\{0\}]/\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

levých $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-modulů, kde $\psi(Q) = Q \cdot x|_U$ pro $Q \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U)$ a $\varphi(P) = [P(\frac{1}{x})]$ pro $P \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U)$.

5) Nechť $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}[\star\{0\}]\, e^{\frac{1}{x}}$, kde $e^{\frac{1}{x}}$ chápeme jako symbol. Uvažujme na $\mathcal{M}$ strukturu levého $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-modulu, jenž je dána vztahy

$$f\Big(ge^{\frac{1}{x}}\Big) = (fg)e^{\frac{1}{x}},$$
$$\partial_x\Big(ge^{\frac{1}{x}}\Big) = \Big(g' - \frac{g}{x^2}\Big)e^{\frac{1}{x}}$$

kde $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U), g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}[\star\{0\}](U)$ a $\partial_x \in \Theta_{\mathbb{C}}(U)$. Pak máme exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\psi} \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

levých $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-modulů, kde $\psi(Q) = Q \cdot (x^2\partial_x + 1)|_U$ pro $Q \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U)$ a $\varphi(P) = P(e^{\frac{1}{x}})$ pro $P \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U)$.

Ukáže se, že pro $k \geq 1$ existují polynomy $Q_k(x) \in \mathbb{C}[x]$ splňující

$$\partial_x^k\big(e^{\frac{1}{x}}\big) = (-1)^k\, \frac{Q_k(x)}{x^{2k}}\, e^{\frac{1}{x}}, \quad \deg Q_k = k-1, \quad Q_k(0) = 1.$$

Dále se pak dokáže, že existuje funkcionální rovnice

$$P(s)\big(x^{s+1}e^{\frac{1}{x}}\big) = b(s)x^s e^{\frac{1}{x}}$$

pro každé $s \in \mathbb{Z}$, kde $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ a $P(s) \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s]$. Snadno se ověří, že $b(s) = 1$ a $P(s) = -x\partial_x + s + 1$.

6) Uvažujme kompaktní varietu $X = \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Body $\mathbb{CP}^1$ budeme psát ve tvaru $(z_0 : z_1)$, kde $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Standardní otevřené pokrytí je dáno otevřenými podmnožinami

$$U_i = \{(z_0 : z_1) \in \mathbb{CP}^1;\ z_i \neq 0\} \tag{1.24}$$

pro $i = 0, 1$. Dále uvažujme homeomorfismy

$$x_0 \colon U_0 \to \mathbb{C}, \quad (z_0 : z_1) \mapsto \frac{z_1}{z_0}, \tag{1.25}$$
$$x_1 \colon U_1 \to \mathbb{C}, \quad (z_0 : z_1) \mapsto \frac{z_0}{z_1}. \tag{1.26}$$

Pak přechodové zobrazení $x_0 \circ x_1^{-1} \colon x_1(U_0 \cap U_1) \to x_0(U_0 \cap U_1)$ je dáno vztahem

$$(x_0 \circ x_1^{-1})(z) = \frac{1}{z} \tag{1.27}$$

pro každé $z \in x_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tudíž (U_0, x_0) a (U_1, x_1) definují na $\mathbb{CP}^1$ holomorfní atlas. Uvažujme na $X = \mathbb{CP}^1$ diferenciální operátory prvního řádu $e, f, h \in F_1\mathcal{D}_X(X)$, jež jsou definovány předpisem

$$e|_{U_0} = x_0^2\partial_{x_0}, \qquad f|_{U_0} = -\partial_{x_0}, \qquad h|_{U_0} = 2x_0\partial_{x_0}, \tag{1.28}$$
$$e|_{U_1} = -\partial_{x_1}, \qquad f|_{U_1} = x_1^2\partial_{x_1}, \qquad h|_{U_1} = -2x_1\partial_{x_1}. \tag{1.29}$$

Snadno ověříme, že operátory e, f, h splňují následující komutační relace

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h, \tag{1.30}$$

tudíž máme netriviální homomorfismus komplexních Lieových algeber

$$\varphi\colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_X). \tag{1.31}$$

Jestliže $\mathcal{M}$ je levý $\mathcal{D}_X$-modul, pak $\Gamma(X, \mathcal{M})$ je levý $\Gamma(X, \mathcal{D}_X)$-modul, tudíž $\Gamma(X, \mathcal{M})$ je rovněž reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

a) Pro $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ je $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \mathcal{M}) = 1$, neboť X je souvislá kompaktní komplexní varieta a jediné holomorfní funkce na X jsou konstantní funkce. Výsledná reprezentace je 1-dimenzionální triviální reprezentace.

b) Pro $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X[\star\{\infty\}]$ je $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \mathcal{M}) = \infty$. Nechť x značí meromorfní funkci x_1 na X, která má pól prvního řádu v ∞. Pak množina $\{x^n;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ tvoří bázi $\Gamma(X, \mathcal{M})$. Reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na $\Gamma(X, \mathcal{M})$ je pak dána vztahy

$$h \cdot x^n = -2nx^n, \quad f \cdot x^n = nx^{n+1}$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$ a

$$e \cdot x^0 = 0, \quad e \cdot x^n = -nx^{n-1}$$

pro $n \in \mathbb{N}$. Tudíž $\Gamma(X, \mathcal{M})$ je reducibilní váhový modul (weight module), neboť $\mathbb{C} \cdot x^0$ je invariantní podprostor.

c) Pro $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X[\star\{\infty\}]/\mathcal{O}_X$ je $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \mathcal{M}) = \infty$. Nechť x značí meromorfní funkci x_1 na X, která má pól prvního řádu v ∞. Pak množina $\{x^n;\, n \in \mathbb{N}\}$ tvoří bázi $\Gamma(X, \mathcal{M})$. Reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na $\Gamma(X, \mathcal{M})$ je pak dána vztahy

$$h \cdot x^n = -2nx^n, \quad f \cdot x^n = nx^{n+1}$$

pro $n \in \mathbb{N}$ a

$$e \cdot x^1 = 0, \quad e \cdot x^n = -nx^{n-1}$$

pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tudíž $\Gamma(X, \mathcal{M})$ je ireducibilní modul s nejvyšší váhou -2 (highest weight module).

1.9 Konstrukce $\mathcal{D}_X$-modulů

Jelikož svazek okruhů $\mathbb{C}_X$ je obsažen v centru $\mathcal{D}_X$ máme funktory

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bullet\,,\bullet)\colon\ \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X) &\to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X), \\ \bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \bullet\colon\ \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X{}^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X) &\to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X). \end{aligned}$$

V dalším bude studovat funktory $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\bullet\,,\bullet)$ a $\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \bullet$.

Tvrzení 1.23. Nechť $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ a $\mathcal{M}', \mathcal{N}' \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X{}^{\mathrm{op}})$. Pak máme

i) $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$, $\quad \xi \cdot (s \otimes t) = (\xi \cdot s) \otimes t + s \otimes (\xi \cdot t)$,
ii) $\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X{}^{\mathrm{op}})$, $\quad (s \otimes t) \cdot \xi = (s \cdot \xi) \otimes t - s \otimes (\xi \cdot t)$,
iii) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$, $\quad (\xi \cdot \psi)(s) = \xi \cdot (\psi(s)) - \psi(\xi \cdot s)$,
iv) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}', \mathcal{N}') \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$, $\quad (\xi \cdot \psi)(s) = -(\psi(s)) \cdot \xi + \psi(s \cdot \xi)$,
v) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}') \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X{}^{\mathrm{op}})$, $\quad (\psi \cdot \xi)(s) = (\psi(s)) \cdot \xi + \psi(\xi \cdot s)$,

kde $\xi \in \Theta_X(U)$.

Důkaz. ♠

Poznámka. Z tvrzení 1.23 jsou vyloučeny $\mathcal{O}_X$-moduly $\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}'$ a $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}', \mathcal{N})$. Důvod je ten, že tyto $\mathcal{O}_X$-moduly nelze obecně opatřit strukturou levého ani pravého $\mathcal{D}_X$-modulu.

Důsledky tvrzení 1.23 si lze snadno zapamatovat užitím korespondence "levý"$\leftrightarrow$ 0, "pravý"$\leftrightarrow$ 1 a $\otimes \leftrightarrow +$, $\mathcal{H}om(\bullet, \star) \leftrightarrow -\bullet + \star$.

Tvrzení 1.24. Nechť $\mathcal{M}$ je levý $\mathcal{D}_X$-modul a $\mathcal{F}$ je $\mathcal{O}_X$-modul. Pak existuje kanonický izomorfismus

$$\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \simeq (\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \tag{1.32}$$

levých $\mathcal{D}_X$-modulů. Přičemž $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ je tenzorový součin pravého $\mathcal{O}_X$-modulu $\mathcal{D}_X$ a (levého) $\mathcal{O}_X$-modulu $\mathcal{F}$, tudíž je to levý $\mathcal{D}_X$-modul. Obdobně $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M})$ je tenzorový součin pravého $\mathcal{O}_X$-modulu $\mathcal{D}_X$ a (levého) $\mathcal{O}_X$-modulu $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$.

Důkaz. ♠

Poznámka. Položíme-li $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ v tvrzení 1.24, obdržíme

$$\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \tag{1.33}$$

pro každý levý $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M}$. Poznamenejme, že struktura levého $\mathcal{D}_X$-modulu na levé straně (1.33) závisí pouze na struktuře $\mathcal{O}_X$-modulu na $\mathcal{M}$.

Každá strana (1.33) má strukturu pravého $\mathcal{D}_X$-modulu. Levá strana má strukturu pravého $\mathcal{D}_X$-modulu danou tvrzením 1.23 jako tenzorový součin pravého $\mathcal{D}_X$-modulu $\mathcal{D}_X$ a levého $\mathcal{D}_X$-modulu $\mathcal{M}$. Na pravé straně je struktura pravého $\mathcal{D}_X$-modulu určena strukturou pravého $\mathcal{D}_X$-modulu na $\mathcal{D}_X$. Tedy (1.33) je ve skutečnosti izomorfismus $(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$-bimodulů.

Tvrzení 1.25. Nechť $\mathcal{N}$ je pravý $\mathcal{D}_X$-modul a $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ jsou levé $\mathcal{D}_X$-moduly. Pak

$$(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2) \simeq (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_1) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}_2 \tag{1.34}$$

v kategorii $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$.

Důkaz. ♠

Jsou-li $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ levé $\mathcal{D}_X$-moduly, pak máme přímo z definice kanonický morfismus

$$\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \to \mathcal{M}_2 \tag{1.35}$$

levých $\mathcal{D}_X$-modulů.

Tvrzení 1.26. Nechť $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ jsou levé $\mathcal{D}_X$-moduly. Pak

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)) \tag{1.36}$$

v kategorii $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$.

Důkaz. ♠

1.10 Korespondence mezi levými a pravými $\mathcal{D}_X$-moduly

Jelikož $\mathcal{D}_X$ je svazek nekomutativních okruhů, jsou levý $\mathcal{D}_X$-modul a pravý $\mathcal{D}_X$-modul rozdílné pojmy. V těchto zápiscích budeme převážně uvažovat levé $\mathcal{D}_X$-moduly, neboť kategorie levých $\mathcal{D}_X$-modulů a kategorie pravých D_X-modulů jsou ekvivalentní kategorie.

Tvrzení 1.27.

Důkaz. ♠

1.11 De Rhamův komplex $\mathrm{DR}_X(\mathcal{M})$

Uvažujme svazek holomorfních vektorových polí Θ_X na komplexní varietě X. Pro každé $p \geq 0$ můžeme definovat svazek Θ_X^p holomorfních p-vektorových polí na X a svazek Ω_X^p holomorfních p-forem na X. Svazek Θ_X^p definujeme vztahem $\Theta_X^p = \Lambda^p \Theta_X$ a svazek Ω_X^p definujeme předpisem $\Omega_X^p = \Lambda^p \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X, \mathcal{O}_X)$. Jelikož Θ_X je lokálně volný $\mathcal{O}_X$-modul ranku $n = \dim X$, jsou i svazky Θ_X^p a Ω_X^p lokálně volné $\mathcal{O}_X$-moduly konečného konstantního ranku, tj. holomorfní vektorové bandly. Pro $p < 0$ položíme $\Theta_X^p = 0$ a $\Omega_X^p = 0$. Dále existuje kanonický izomorfismus $\mathcal{O}_X$-modulů

$$\Omega_X^p \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X^p, \mathcal{O}_X). \tag{1.37}$$

Pro $p = 0$ a $p = n$ je Ω_X^p lokálné volný $\mathcal{O}_X$-modul ranku 1 (line bundle). Svazek Ω_X^0 je roven strukturnímu svazku $\mathcal{O}_X$ (structure sheaf), svazek Ω_X^n budeme značit ω_X a nazývá se *kanonický svazek* (canonical sheaf).

Ekvivalentně lze svazek Θ_X^p respektive Ω_X^p definovat jako svazek řezů holomorfního vektorového bandlu $\Lambda^p TX \to X$ respektive $\Lambda^p T^*X \to X$.

Nechť $\mathcal{M}$ je $\mathcal{O}_X$-modul, pak definujeme $\mathcal{O}_X$-modul $\Omega_X^p(\mathcal{M}) = \Omega_X^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$. Uvažujme nyní levý $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M}$, pak strukturu levého $\mathcal{D}_X$-modulu lze ekvivalentně zadat morfismem $\mathbb{C}_X$-modulů $\nabla\colon \Theta_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$. Využijeme-li kanonického izomorfismu $\mathcal{O}_X$-modulů

$$\Omega_X^p(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Lambda^p \Theta_X, \mathcal{M}) \tag{1.38}$$

pro $p = 0, 1, \ldots, n$, můžeme definovat $\mathbb{C}_X$-lineární morfismy

$$d^p\colon \Omega_X^p(\mathcal{M}) \to \Omega_X^{p+1}(\mathcal{M}) \tag{1.39}$$

vztahem

$$\begin{aligned}(d^p\omega)_V(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p) = &\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \nabla_{\xi_i}(\omega_V(\xi_0, \ldots, \hat{\xi_i}, \ldots, \xi_p)) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_V([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \ldots, \hat{\xi_i}, \ldots, \hat{\xi_j}, \ldots, \xi_p),\end{aligned} \tag{1.40}$$

pro $\omega \in \Omega_X^p(\mathcal{M})(U)$, kde $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p \in \Theta_X(V)$ a $V \subset U$. Morfismus $d^p\colon \Omega_X^p(\mathcal{M}) \to \Omega_X^{p+1}(\mathcal{M})$ navíc splňuje

$$d^{p+q}(\alpha \wedge \omega) = d^p\alpha \wedge \omega + (-1)^p\, \alpha \wedge d^q\omega \tag{1.41}$$

pro každé $\alpha \in \Omega_X^p(U)$ a $\omega \in \Omega_X^q(\mathcal{M})(U)$. Podmínka integrability implikuje, že $d^{p+1} \circ d^p = 0$ pro každé p. Tudíž dostaneme komplex $\mathbb{C}_X$-modulů

$$0 \longrightarrow \Omega_X^0(\mathcal{M}) \xrightarrow{d^0} \Omega_X^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{d^1} \ldots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega_X^n(\mathcal{M}) \longrightarrow 0, \tag{1.42}$$

kde $\Omega_X^0(\mathcal{M})$ je ve stupni 0, nazývající se *de Rhamův komplex* $\mathcal{M}$ a budeme jej značit $\Omega_X^\bullet(\mathcal{M})$. Dále definujeme

$$\mathrm{DR}_X(\mathcal{M}) = \Omega_X^\bullet(\mathcal{M})[d_X] \tag{1.43}$$

pro $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$.

1.12 Spencerův komplex $\mathrm{Sp}_X(\mathcal{M})$

Uvažujme nyní pravý $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M}$, pak strukturu pravého $\mathcal{D}_X$-modulu lze ekvivalentně zadat morfismem $\mathbb{C}_X$-modulů $\nabla\colon \Theta_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$. Potom můžeme definovat $\mathbb{C}_X$-lineární morfismy

$$\delta^p\colon \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Theta_X^p \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Theta_X^{p-1} \tag{1.44}$$

vztahem

$$\delta^p(s\otimes(\xi_1\wedge\xi_2\wedge\dots\wedge\xi_p))=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\nabla_{\xi_i}(s)\otimes(\xi_1\wedge\dots\wedge\hat{\xi}_i\wedge\dots\wedge\xi_p)$$
$$+\sum_{1\le i<j\le p}(-1)^{i+j}s\otimes([\xi_i,\xi_j]\wedge\xi_1\wedge\dots\wedge\hat{\xi}_i\wedge\dots\wedge\hat{\xi}_j\wedge\dots\wedge\xi_p),\quad(1.45)$$

kde $s\in\mathcal{M}(U)$ a $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_p\in\Theta_X(U)$. Podmínka integrability implikuje, že $\delta^{p-1}\circ\delta^p=0$ pro každé p. Tudíž dostaneme komplex $\mathbb{C}_X$-modulů

$$0\longrightarrow\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Theta_X^n\xrightarrow{\delta^n}\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Theta_X^{n-1}\xrightarrow{\delta^{n-1}}\dots\xrightarrow{\delta^1}\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Theta_X^0\longrightarrow 0,\quad(1.46)$$

kde $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Theta_X^0$ je ve stupni 0, nazývající se *Spencerův komplex* $\mathcal{M}$ a budeme jej značit $\mathrm{Sp}_X(\mathcal{M})$.

1.13 Lokální systémy

Definice 1.28. Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že $\mathbb{C}_X$-modul $\mathcal{L}$ je *lokální systém* na X, jestliže $\mathcal{L}$ je lokálně volný $\mathbb{C}_X$-modul konečného ranku. Dále definujeme $\mathrm{Loc}(\mathbb{C}_X)$ (kategorie lokálních systémů na X) jako úplnou podkategorii $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ sestávající z lokálních systémů na X.

Předpokládejme navíc, že X je souvislý, lokálně obloukově souvislý a semilokálně jednoduše souvislý topologický prostor, tj. X má univerzální nakrytí $\widetilde{X}$. Dále nechť $\pi_1(X,x_0)$ je fundamentální grupa topologického prostoru X s bázovým bodem $x_0\in X$, pak lokální systém $\mathcal{L}$ ranku m na X dává reprezentaci $\pi_1(X,x_0)$ na $\mathbb{C}^m\simeq\mathcal{L}_{x_0}$, tj. homomorfismus grup $\varrho\colon\pi_1(X,x_0)\to\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$. Tato reprezentace se nazývá *monodromní reprezentace* (nebo *monodromie*) lokálního systému $\mathcal{L}$ a je definována následovně.

Nechť $\gamma\colon[0,1]\to X$ je uzavřená cesta reprezentující nějaký element fundamentální grupy $\pi_1(X,x_0)$. Jelikož obraz γ je kompaktní množina, lze množinu $\gamma([0,1])$ pokrýt konečně mnoha souvislými otevřenými množinami $U_1,U_2,\dots,U_n$, která splňují $\mathcal{L}|_{U_i}\simeq(\mathbb{C}_X|_{U_i})^m$. Tyto množiny lze navíc zvolit tak, že $U_i\cap U_{i+1}\neq\emptyset$ a $x_0\in U_1\cap U_n$. Zvolíme-li body $x_i\in U_i\cap U_{i+1}$ pro $i=1,2,\dots,n-1$, pak z definice lokálního systému máme posloupnost $\mathbb{C}$-lineárních izomorfismů

$$\mathcal{L}_{x_0}\xleftarrow{\sim}\mathcal{L}(U_1)\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}_{x_1}\xleftarrow{\sim}\mathcal{L}(U_2)\xrightarrow{\sim}\dots\xleftarrow{\sim}\mathcal{L}(U_n)\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}_{x_0},$$

která definuje element $\Psi_\gamma\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$. Snadno nahlédneme, že Ψ_γ nezávisí na volbě pokrytí a závisí pouze na homotopické třídě γ. Obdržíme tudíž reprezentaci fundamentální grupy

$$\varrho\colon\pi_1(X,x_0)\to\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}).\quad(1.47)$$

Na druhou stranu lokální systém $\mathcal{L}$ můžeme zrekonstruovat z reprezentace ϱ následujícím způsobem.

1.14 Riemannova–Hilbertova korespondence I

Nechť X je Riemannova plocha, tj. komplexní varieta dimenze 1. Uvažujme na X systém obyčejných lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$df_i=\sum_{j=1}^{m}f_j\,\alpha_{ij}|_U,\quad i=1,2,\dots,m,\quad(1.48)$$

kde $\alpha_{ij}\in\Omega_X^1(X)$, v neznámých $f_1,f_2,\dots,f_m\in\mathcal{O}_X(U)$ pro každou otevřenou množinu $U\subset X$.

Příklad. Pokud $X=\mathbb{CP}^1\setminus\{\infty,a_1,\dots,a_k\}$, pak lze systém rovnic (1.48) ekvivalentně přepsat následujícím způsobem. Jelikož vektorové pole $\partial_z|_U$ je volný generátor $\Theta_X(U)$ jakožto $\mathcal{O}_X(U)$-modulu, můžeme psát

$$df_i(\partial_z|_U)=\sum_{j=1}^{m}f_j\,\alpha_{ij}(\partial_z|_U).$$

Což lze přepsat do tvaru

$$\frac{df_i}{dz} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}|_U f_j, \tag{1.49}$$

kde $a_{ij} = \alpha_{ij}(\partial_z) \in \mathcal{O}_X(X)$ a $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_X(U)$.

Příklad. Obyčejná lineární diferenciální rovnice m-tého řádu na $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ve tvaru

$$\frac{d^m f}{dz^m} + b_1(z)\,\frac{d^{m-1} f}{dz^{m-1}} + \cdots + b_m(z) f = 0, \tag{1.50}$$

kde b_i jsou meromorfní funkce na $\mathbb{CP}^1$ mající póly v bodech $\infty, a_1, \ldots, a_k$, je ekvivalentní systému rovnic (1.48) na $X = \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty, a_1, \ldots, a_k\}$. Neboť definujeme-li

$$f_i = \frac{d^{i-1} f}{dz^{i-1}}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m-1$, pak obdržíme system rovnic ve tvaru

$$\frac{df_i}{dz} = f_{i+1}$$

pro $i = 1 \ldots m-1$ a

$$\frac{df_m}{dz} = -b_1(z) f_m - \cdots - b_m(z) f_1,$$

jež je ekvivalentní rovnici (1.50).

Nechť X je Riemannova plocha a nechť $D = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} n_\alpha [a_\alpha]$ je divisor[1] na X. Dále označme $S_D = \{a_\alpha;\, n_\alpha \neq 0\}$. Uvažujme systém rovnic (1.48) na $Y = X \setminus S_D$. Bod $a \in S_D$ se nazývá *regulární singulární bod* (nebo *regulární singularita*) systému rovnic (1.48), jestliže existuje lokální mapa (U, x) na X, jež splňuje $U \cap S_D = \{a\}$, a systém rovnic (1.48) lze psát ve tvaru

$$df_i(\partial_x|_{U\setminus\{a\}}) = \partial_x|_{U\setminus\{a\}}(f_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{b_{ij}(x)}{x - x_a}\, f_j, \tag{1.51}$$

kde $x_a = x(a)$, $\alpha_{ij}(\partial_x|_{U\setminus\{a\}}) = \frac{b_{ij}(x)}{x-x_a}$ pro nějaké $b_{ij} \in \mathcal{O}_X(U)$ a $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_Y(U \setminus \{a\})$. Jinak bod $a \in D$ nazveme *iregulární singulární bod* (nebo *iregulární singularita*) systému rovnic (1.48).

Řekneme, že systém rovnic (1.48) na $Y = X \setminus S_D$ je *Fuchsova typu*, jestliže všechny body z S_D jsou regulární singularity. Diferenciální rovnice m-tého řádu (1.50) se nazývá Fuchsova typu, jestliže odpovídající systém rovnic je Fuchsova typu.

Příklad. Diferenciální rovnice prvního řádu na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tvaru

$$\frac{df}{dz} = \frac{\alpha}{z}\, f, \tag{1.52}$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$, je rovnice Fuchsova typu na $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty, 0\}$, neboť ∞ a 0 jsou regulární singularity.

Nechť X je souvislá Riemannova plocha a nechť D je divisor na X. Dále uvažujme systém rovnic (1.48) na $X \setminus S_D$. Označíme-li $\mathcal{L}(U)$ prostor řešení systému rovnic (1.48) na otevřené podmnožině $U \subset X \setminus S_D$, pak $\mathcal{L}$ je lokální systém ranku m na $X \setminus S_D$. Máme tedy monodromní reprezentaci

$$\varrho \colon \pi_1(X \setminus S_D, x_0) \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$$

[1] Divisor D na Riemannově ploše X je lokálně konečná formální lineární kombinace (s celočíselnými koeficienty) bodů z X, tj. $D = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} n_\alpha [a_\alpha]$, kde $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ a $a_\alpha \in X$ a pro každý bod $x \in X$ existuje otevřené okolí $U \subset X$ bodu x takové, že množina $\{\alpha \in \mathcal{A};\, a_\alpha \in U,\, n_\alpha \neq 0\}$ je konečná.

lokálního sytému $\mathcal{L}$. Speciálně tedy pro případ $X = \mathbb{CP}^1$ a $S_D = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$.

V roce 1857 Riemann předložil následující problém. Mějme dány body $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{CP}^1$ a věrnou reprezentaci

$$\varrho\colon \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_k\}, x_0) \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \tag{1.53}$$

fundamentální grupy $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_k\}, x_0)$. Nalezněte všechny systémy rovnic Fuchsova typu na $\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$, jejichž monodromie (vzhledem k nějaké zvolené bázi stébla svazku řešení v bodě x_0) je ϱ. Riemann ukázal, že v případě $m = 2$ a $k = 2$ existuje jediný systém rovnic Fuchsova typu s danými regulárními singularitami a_0, a_1, a_2 a s danou monodromií

$$\varrho\colon \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_0, a_1, a_2\}, x_0) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}). \tag{1.54}$$

Pokud jsou regulárními singulárními body $\infty, 0, 1$, pak je tento systém rovnic dán hypergeometrickou rovnicí

$$z(1-z)\,\frac{d^2 f}{dz^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)\,\frac{df}{dz} - \alpha\beta f = 0, \tag{1.55}$$

kde α, β, γ jsou konstanty závisející na monodromii ϱ.

Věta 1.29. Nechť $\mathcal{M}$ je levý $\mathcal{D}_X$-modul, který je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul. Pak $\mathcal{M}$ je lokálně volný $\mathcal{O}_X$-modul konečného ranku, tj. $\mathcal{M}$ je integrabilní konexe.

Důkaz. Jelikož $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul, stačí ukázat, že $\mathcal{M}_x$ je volný $\mathcal{O}_{X,x}$-modul pro každé $x \in X$. Nechť $\mathfrak{m}_x$ značí maximální ideál v $\mathcal{O}_{X,x}$. Z předpokladu víme, že $\mathcal{M}_x$ je konečně generovaný $\mathcal{O}_{X,x}$-modul. Dále z Nakayamova lemmatu plyne, že existují elementy $s_1, s_2, \dots, s_m \in \mathcal{M}_x$ takové, že

$$\mathcal{M}_x = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{X,x} s_i$$

a $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_m \in \mathcal{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{M}_x$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathcal{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{M}_x$ nad $\mathbb{C} \simeq \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. Ukážeme, že $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ jsou volné generátory $\mathcal{O}_{X,x}$-modulu $\mathcal{M}_x$. Předpokládejme, že existuje netriviální relace

$$\sum_{i=1}^{m} f_i s_i = 0,$$

kde $f_i \in \mathcal{O}_{X,x}$. Nyní pro každé $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ definujme řád $\mathrm{ord}(f)$ vztahem $\mathrm{ord}(f) = \max\{k;\ f \in \mathfrak{m}_x^k\}$ pokud $f \in \mathfrak{m}_x$ a $\mathrm{ord}(f) = 0$ pokud $f \in \mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_x$. Dále nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ je multiindex splňující podmínku $|\alpha| = \min\{\mathrm{ord}(f_i);\ i = 1, 2, \dots, m\}$. Jelikož $\partial^\beta(f_i) \in \mathfrak{m}_x$ pro všechna $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, pro která $|\beta| < |\alpha|$, můžeme psát

$$\partial^\alpha(f_i)s_i - \partial^\alpha(f_i s_i) \in \mathfrak{m}_x\mathcal{M}_x$$

pro $1 \le i \le m$. Označíme-li dále $g_i = \partial^\alpha(f_i)$, pak máme $\sum_{i=1}^m g_i s_i \in \mathfrak{m}_x\mathcal{M}_x$. Můžeme zvolit vhodný index i a multiindex α, tak aby $\partial^\alpha(f_i) \in \mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_x$. Tudíž obdržíme netriviální relaci

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{g}_i \bar{s}_i = 0,$$

kde $\bar{g}_i \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{C}$, v $\mathcal{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{M}_x$, což vede ke sporu s výběrem $s_1, s_2, \dots, s_m$. ♠

Důsledek. Kategorie $\mathrm{Con}(\mathcal{D}_X)$ je abelovská kategorie.

Definice 1.30. Nechť $\mathcal{M}$ je levý $\mathcal{D}_X$-modul. Pak definujeme $\mathbb{C}_X$-modul $\mathrm{hor}(\mathcal{M})$ jako

$$\mathrm{hor}(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \tag{1.56}$$

a budeme jej nazývat *svazek horizontálních řezů* $\mathcal{M}$.

Nechť $\mathcal{I}$ je levý ideál v $\mathcal{D}_X$ generovaný Θ_X. Pak můžeme psát rozklad

$$\mathcal{D}_X = F_0\mathcal{D}_X \oplus \mathcal{I} \simeq \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{I} \tag{1.57}$$

v $\mathcal{D}_X$. Navíc pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ je $\mathcal{I}(U)$ levý anihilátor elementu $1_X|_U \in \mathcal{O}_X(U)$. Tudíž máme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{D}_X \to \mathcal{O}_X \to 0 \tag{1.58}$$

levých $\mathcal{D}_X$-modulů. Je-li $\mathcal{M}$ levý $\mathcal{D}_X$-modul, pak $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bullet, \mathcal{M})\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ je levý exaktní funktor. Obdržíme tedy exaktní posloupnost

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{M}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{I}, \mathcal{M}) \tag{1.59}$$

levých $\mathbb{C}_X$-modulů. Dále snadno nahlédneme, že morfismus

$$\varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{M})(U) \mapsto \varphi_U(1_U) \in \mathcal{M}(U)$$

je ve skutečnosti izomorfismus

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}$$

levých $\mathbb{C}_X$-modulů. Obdobně ověříme, že morfismus

$$\varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{I}, \mathcal{M})(U) \mapsto \varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X, \mathcal{M})(U)$$

je izomorfismus

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{I}, \mathcal{M}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X, \mathcal{M})$$

levých $\mathbb{C}_X$-modulů. Tudíž předchozí exaktní posloupnost můžeme psát ve tvaru

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{d^0} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X, \mathcal{M}), \tag{1.60}$$

odkud již získáme, že $\mathrm{hor}(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \simeq \ker d^0 = H^{-d_X}(\mathrm{DR}_X(\mathcal{M}))$.

Zvolíme-li například $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, pak obdržíme $\mathrm{hor}(\mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{C}_X$. Jestliže zvolíme $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X$, pak obdržíme $\mathrm{hor}(\mathcal{D}_X) = 0$.

Definice 1.31. Řekneme, že $\mathbb{C}_X$-modul $\mathcal{L}$ je *lokální systém* na X, jestliže $\mathcal{L}$ je lokálně volný $\mathbb{C}_X$-modul konečného ranku. Dále definujeme kategorii $\mathrm{Loc}(\mathbb{C}_X)$ (kategorie lokálních systémů na X) jako úplnou podkategorii $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ sestávající z lokálních systémů na X.

Uvažujme lokální systém $\mathcal{L}$ na X. Pak můžeme definovat integrabilní konexi $\mathcal{M}$ na X jako $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L}$, přičemž struktura levého $\mathcal{D}_X$-modulu je dána vztahem

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_X(U) \times \mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}(U),\\ (P, f \otimes \lambda) \mapsto P(f) \otimes \lambda.\end{gathered} \tag{1.61}$$

Dále díky izomorfismu $\mathcal{O}_X$-modulů $\Omega_X^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \simeq \Omega_X^p \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L}$ můžeme diferenciály v komplexu $\Omega_X^\bullet(\mathcal{M})$ psát explicitně ve tvaru

$$d^p \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}}\colon \Omega_X^p \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L} \to \Omega_X^{p+1} \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L} \tag{1.62}$$

pro každé p. Tudíž máme $\mathrm{hor}(\mathcal{M}) \simeq \ker(d^0 \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}}) \simeq \ker d^0 \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L} \simeq \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$. Jelikož máme $H^i(\Omega_X^\bullet(\mathcal{M})) \simeq H^i(\Omega_X^\bullet) \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L}$, obdržíme pro vyšší kohomologické grupy z holomorfní verze Poincarého lemmatu $H^i(\Omega_X^\bullet(\mathcal{M})) = 0$ pro $i \geq 1$. Máme tudíž kvaziizomorfismus $\mathcal{L} \to_q \Omega_X^\bullet(\mathcal{M})$ v kategorii $C^b(\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X))$.

Věta 1.32. Nechť $\mathcal{M}$ je integrabilní konexe na X. Pak $\mathrm{hor}(\mathcal{M})$ je lokální systém na X a navíc máme

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathrm{hor}(\mathcal{M}) \tag{1.63}$$

v kategorii $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{M}$ je integrabilní konexe ranku m na X. Jelikož $\mathrm{hor}(\mathcal{M}) \simeq \ker d^0$, plyne z klasické Frobeniovy věty, že $\mathrm{hor}(\mathcal{M})$ je lokálně volný $\mathbb{C}_X$-modul ranku m. $\spadesuit$

Věta 1.33. (Riemannova–Hilbertova korespondence) Nechť $\mathcal{M}$ je integrabilní konexe ranku r na komplexní varietě X. Pak $H^i(\mathrm{DR}_X(\mathcal{M})) = 0$ pro $i \neq -d_X$ a $H^{-d_X}(\mathrm{DR}_X(\mathcal{M}))$ je lokální systém ranku r. Navíc máme ekvivalenci

$$H^{-d_X}(\mathrm{DR}_X(\,\bullet\,))\colon\ \mathrm{Con}(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}(\mathbb{C}_X) \tag{1.64}$$

abelovských kategorií.

Důkaz. $\spadesuit$

Věta 1.34. (holomorphic Poincaré lemma) Nechť X je komplexní varieta. Pak $H^i(\Omega_X^\bullet) = 0$ pro $i \neq 0$ a $H^0(\Omega_X^\bullet) \simeq \mathbb{C}_X$, tj. máme kvaziizomorfismus $\mathbb{C}_X \to_q \Omega_X^\bullet$ v kategorii $C^b(\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X))$.

Důkaz. $\spadesuit$

Poznámka. Uvažujme koherentní levý ideál $\mathcal{I}$ v $\mathcal{D}_X$ takový, že $\mathcal{D}_X/\mathcal{I}$ je integrabilní konexe na X. Pak existuje lokální systém $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}_X$ na X splňující

(1) $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{I}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{H}$,
(2) $\mathcal{I} = \{P \in \mathcal{D}_X;\, P(\lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathcal{H}\}$.

Chápeme-li $\mathcal{H}$ jako object v kategorii $\mathrm{Loc}(\mathbb{C}_X)$, pak $\mathcal{H}$ je duální lokální systém k $\mathrm{hor}(\mathcal{D}_X/\mathcal{I})$.

Na druhou stranu nechť $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}_X$ je lokální systém na X. Položme

$$\mathcal{I} = \{P \in \mathcal{D}_X;\, P(\lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathcal{H}\},$$

pak $\mathcal{H} \simeq \mathrm{hor}(\mathcal{D}_X/\mathcal{I})$.

Uvažujme souvislou komplexní varietu X. Nechť $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathcal{O}_X(X)$ je $\mathbb{C}$-lineárně nezávislé funkce. Pak $\mathcal{H} = \mathbb{C}_X f_1 + \mathbb{C}_X f_2 + \cdots + \mathbb{C}_X f_k$ je volný $\mathbb{C}_X$-modul ranku k. Položíme-li

$$\mathcal{I} = \{Q \in \mathcal{D}_X;\, Q(f_1) = Q(f_2) = \cdots = Q(f_k) = 0\},$$

$\mathcal{I}$ je koherentní levý ideál v $\mathcal{D}_X$ a $\mathcal{D}_X/\mathcal{I} \simeq \mathcal{O}_X^k$ v kategorii levých $\mathcal{D}_X$-modulů.

2 Koherentní $\mathcal{D}_X$-moduly

Věta 2.1. (Oka coherence theorem) Nechť X je komplexní varieta. Pak svazek okruhů $\mathcal{O}_X$ je koherentní svazek okruhů.

Důkaz. $\spadesuit$

Věta 2.2. Nechť X je komplexní varieta. Pak svazek okruhů $\mathcal{D}_X$ je levý a pravý koherentní svazek okruhů.

Důkaz. $\spadesuit$

Označení.

(i) Úplnou podkategorii kategorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ sestávající z koherentních (levých) $\mathcal{D}_X$-modulů budeme značit $\mathrm{Coh}(\mathcal{D}_X)$ (*kategorie koherentních (levých) $\mathcal{D}_X$-modulů*). Obdobně definujeme kategorii $\mathrm{Coh}(\mathcal{D}_X{}^{\mathrm{op}})$.

(ii) Pro $\natural = \emptyset, +, -, b$ označíme $D^\natural_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ úplnou podkategorii $D^\natural(\mathcal{D}_X)$ sestávající z komplexů $X^\bullet \in \mathrm{Ob}(D^\natural(\mathcal{D}_X))$ takových, že $H^n(X^\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Coh}(\mathcal{D}_X))$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Kategorie $D^\natural_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ je triangulovaná kategorie, neboť $\mathrm{Coh}(\mathcal{D}_X)$ je tlustá podkategorie abelovské kategorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$. Tato triangulovaná kategorie a jisté její uplné triangulované podkategorie budou později hrát důležitou roli.

2.1 Gradovaný svazek okruhů $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$ a hlavní symbol

Připomeňme, že svazek okruhů $\mathcal{D}_X$ má filtraci $F = \{F_m\mathcal{D}_X\}_{m\in\mathbb{Z}}$ danou řádem diferenciálního operátoru. Máme tedy asociovaný gradovaný svazek okruhů

$$\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}_m^F\mathcal{D}_X, \qquad \mathrm{gr}_m^F\mathcal{D}_X = F_m\mathcal{D}_X/F_{m-1}\mathcal{D}_X. \tag{2.1}$$

Kanonické zobrazení $F_m\mathcal{D}_X \to \mathrm{gr}_m^F\mathcal{D}_X$ budeme značit σ_m. Z lemmatu 1.7 obdržíme, že $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$ je gradovaný svazek komutativních okruhů. Protože přirozený morfismus

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_0^F\mathcal{D}_X$$

je izomorfismus svazků okruhů, má $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$ strukturu komutativní gradované $\mathcal{O}_X$-algebry. Dále jelikož přirozený morfismus

$$\Theta_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_1^F\mathcal{D}_X$$

je izomorfismus levých $\mathcal{O}_X$-modulů, plyne z univerzální vlastnosti komutativní gradované $\mathcal{O}_X$-algebry $S_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X)$ (gradovaná $\mathcal{O}_X$-algebra $S_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X)$ je gradovaná symetrická $\mathcal{O}_X$-algebra asociovaná k levému $\mathcal{O}_X$-modulu Θ_X) existence morfismu

$$\Phi\colon S_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) \to \mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X \tag{2.2}$$

gradovaných $\mathcal{O}_X$-algeber, jež splňuje, že morfismus $\Theta_X \to S^1_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{gr}_1^F\mathcal{D}_X$ levých $\mathcal{O}_X$-modulů splývá s morfismem $\Theta_X \to \mathrm{gr}_1^F\mathcal{D}_X$ levých $\mathcal{O}_X$-modulů.

Věta 2.3. Morfismus komutativních gradovaných $\mathcal{O}_X$-algeber

$$\Phi\colon S_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) \to \mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X \tag{2.3}$$

je izomorfismus gradovaných $\mathcal{O}_X$-algeber.

Důkaz. ♠

Uvažujme kotečný bandl $\pi_X : T^*X \to X$ komplexní variety X. Jelikož fíbry T^*_xX jsou komplexní vektorové prostory, existuje přirozená levá akce multiplikativní Lieovy grupy $\mathbb{C}^\times = GL(1,\mathbb{C})$ na T^*X. Infinitezimální generátor této akce je vektorové pole ϱ_X na T^*X, které je definováno vztahem

$$((\varrho_X)_U(f))(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}_{|z=0} f(e^z.x), \tag{2.4}$$

kde $f \in \mathcal{O}_{T^*X}(U)$. Vektorové pole ϱ_X se nazývá Eulerovo vektorové pole.

Definice 2.4. Nechť $U \subset T^*X$ je otevřená množina a $m \in \mathbb{N}_0$. Položíme

$$\mathcal{O}_{T^*X}(m)(U) = \{f \in \mathcal{O}_{T^*X}(U);\ \varrho_X|_U(f) = mf\}, \tag{2.5}$$

kde $\varrho_X \in \Theta_{T^*X}(T^*X)$ je Eulerovo vektorové pole. Pak $\mathcal{O}_{T^*X}(m)$ je svazek abelovských grup a řezy se nazývají homogenní stupně m podél fíbrů T^*X. Pro $m \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$ položíme $\mathcal{O}_{T^*X}(m) = 0$. Dále definujeme gradovaný svazek okruhů

$$\mathcal{O}_{[T^*X]} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{T^*X}(m) \tag{2.6}$$

na T^*X.

Lemma 2.5. $\mathcal{O}_X$-moduly Θ_X a

Věta 2.6. Gradované $\mathcal{O}_X$-algebry $S_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X)$ a $\pi_{X*}\mathcal{O}_{[T^*X]}$ jsou izomorfní.

Důkaz. $\spadesuit$

Pro $m \in \mathbb{N}_0$ uvažujme lineární diferenciální operátor $P \in F_m\mathcal{D}_X(U)$ na otevřené množině $U \subset X$. Jelikož z věty 2.3 a 2.6 máme

$$\operatorname{gr}^F_m \mathcal{D}_X \xrightarrow{\sim} S^m_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) \xrightarrow{\sim} \pi_{X*}(\mathcal{O}_{T^*X}(m)),$$

řez $\sigma_m(P) \in \operatorname{gr}^F_m \mathcal{D}_X(U)$ definuje řez z $\mathcal{O}_{T^*X}(m)(\pi_X^{-1}(U))$, který budeme značit $\tilde{\sigma}_m(P)$. Budeme jej nazývat *hlavní symbol* (řádu m) lineárního diferenciálního operátoru P.

Nechť (U, u) je lokální mapa na X. Pak máme

$$\tilde{\sigma}_m(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \tag{2.7}$$

kde $P = \sum_{|\alpha|\leq m} i_U(a_\alpha)\partial^\alpha$ je standardní forma reprezentace lineárního diferenciálního operátoru P na otevřené množině U.

2.2 Dobrá filtrace

Označme $\operatorname{Mod}^{\mathrm{gr}}(\operatorname{gr}^F \mathcal{D}_X)$ abelovskou kategorii gradovaných $\operatorname{gr}^F \mathcal{D}_X$-modulů a $\operatorname{Coh}^{\mathrm{gr}}(\operatorname{gr}^F \mathcal{D}_X)$ abelovskou kategorii gradovaných koherentních $\operatorname{gr}^F \mathcal{D}_X$-modulů.

Definice 2.7. (dobrá filtrace) Nechť $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul. Řekneme, že filtrace F na $\mathcal{M}$ je *dobrá filtrace*, jestliže filtrace F je lokálně zdola omezená (tj. pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x a $p_0 \in \mathbb{Z}$ takové, že $F_p\mathcal{M}|_U = 0$ pro každé $p < p_0$) a $\operatorname{gr}^F \mathcal{M}$ je gradovaný koherentní $\operatorname{gr}^F \mathcal{D}_X$-modul.

Jelikož $\mathcal{D}_X$ obsahuje svazek okruhů $F_0\mathcal{D}_X$, který je izomorfní svazku okruhů $\mathcal{O}_X$, vyplývá z toho, že pokud $\{F_p\mathcal{M}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ je filtrace na $\mathcal{D}_X$-modulu $\mathcal{M}$, pak $F_p\mathcal{M}$ je $\mathcal{O}_X$-podmodul $\mathcal{M}$. V dalším nás bude zajímat, zda se jedná o koherentní $\mathcal{O}_X$-moduly.

Tvrzení 2.8. Nechť $\mathcal{M} = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} \operatorname{gr}_p \mathcal{M}$ je gradovaný koherentní $\operatorname{gr}^F \mathcal{D}_X$-modul. Pak každá homogenní komponenta $\operatorname{gr}_p \mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, neboť svazek okruhů $\operatorname{gr}^F \mathcal{D}_X$ je lokálně izomorfní polynomiálnímu svazku okruhů $\mathcal{O}_X[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$. $\spadesuit$

Tvrzení 2.9. Nechť $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul s dobrou filtrací F na $\mathcal{M}$. Pak $F_p\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul pro každé $p \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Z definice dobré filtrace a z tvrzení 2.8 plyne, že $\operatorname{gr}^F_p \mathcal{M} = F_p\mathcal{M}/F_{p-1}\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul. Dále máme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to F_{p-1}\mathcal{M} \to F_p\mathcal{M} \to F_p\mathcal{M}/F_{p-1}\mathcal{M} \to 0$$

$\mathcal{O}_X$-modulů. Jelikož dobrá filtrace je lokálně zdola omezená, existuje pro každé $x \in X$ otevřené okolí bodu U bodu x a $p_0 \in \mathbb{Z}$ tak, že $F_p\mathcal{M}|_U = 0$ pro $p < p_0$. Indukci ukážeme, že $F_p\mathcal{M}|_U$ je koherentní $\mathcal{O}_X|_U$-modul. $\spadesuit$ dodělat

Tvrzení 2.10. Nechť $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul s filtrací F na $\mathcal{M}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.

(i) Filtrace F na $\mathcal{M}$ je dobrá filtrace.

(ii) Filtrace F je lokálně zdola omezená, pro každé $p \in \mathbb{Z}$ je $F_p\mathcal{M}$ koherentní $\mathcal{O}_X$-modul a pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x a $p_0 \in \mathbb{Z}$ takové, že pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ je $F_m\mathcal{D}_X|_U \cdot F_{p_0}\mathcal{M}|_U = F_{m+p_0}\mathcal{M}|_U$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že (i) implikuje (ii). Je-li F dobrá filtrace na $\mathcal{M}$, pak filtrace F je lokálně zdola omezená a pro každé $p \in \mathbb{Z}$ je $F_p\mathcal{M}$ koherentní $\mathcal{O}_X$-modul. Zbývá tedy ukázat poslední vlastnost. Jelikož $\mathrm{gr}^F\mathcal{M}$ je koherentní $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$-modul, existuje pro každé $x \in X$ otevřené okolí U bodu x, nezáporné přirozené číslo $r \in \mathbb{N}_0$ a exaktní posloupnost

$$(\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X|_U)^r \to \mathrm{gr}^F\mathcal{M}|_U \to 0$$

levých $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X|_U$-modulů. Pak existují celá čísla p_k a elementy $m_k \in F_{p_k}\mathcal{M}(U)$ pro $k = 1, 2, \ldots, r$ tak, že množina $\{\tau_{p_k}(m_k|_V)\}_{1\leq k\leq r}$ generuje $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X(V)$-modul $\mathrm{gr}^F\mathcal{M}(V)$ pro každou otevřenou množinu $V \subset U$. Pak snadno indukcí podle p ukážeme, že

$$F_p\mathcal{M}(V) = \sum_{p\geq p_k} F_{p-p_k}\mathcal{D}_X(V)m_k|_V$$

pro každé p. Definujeme-li $p_0 = \max\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, obdržíme požadované tvrzení.

Nyní ukážeme obrácenou implikaci. ♠

Tvrzení 2.11. Nechť $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul a F, G jsou dvě filtrace na $\mathcal{M}$. Předpokládejme, že F je dobrá filtrace. Pak pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x a $p_0 \gg 0$ takové, že

$$F_p\mathcal{M}|_U \subset G_{p+p_0}\mathcal{M}|_U$$

pro každé $p \in \mathbb{Z}$. Pokud navíc také G je dobrá filtrace, pak pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x a $p_0 \gg 0$ takové, že

$$G_{p-p_0}\mathcal{M}|_U \subset F_p\mathcal{M}|_U \subset G_{p+p_0}\mathcal{M}|_U$$

pro každé $p \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Jelikož F je dobrá filtrace, pak pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x, celá čísla p_k a elementy $m_k \in F_{p_k}\mathcal{M}(U)$ pro $k = 1, 2 \ldots, r$ tak, že

$$F_p\mathcal{M}(V) = \sum_{p\geq p_k} F_{p-p_k}\mathcal{D}_X(V)m_k|_V$$

pro každé p. Pak můžeme vzít $q_k \in \mathbb{Z}$ takové, že $m_k \in G_{q_k}\mathcal{M}(U)$ pro $k = 1, 2, \ldots, r$. Dále označme $p_0 = \max\{q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_k - p_k\}$. Pak máme

$$\begin{aligned} F_p\mathcal{M}(V) &= \sum_{p\geq p_k} F_{p-p_k}\mathcal{D}_X(V)m_k|_V \subset \sum_{p\geq p_k} F_{p-p_k}\mathcal{D}_X(V)G_{q_k}\mathcal{M}(V) \\ &\subset \sum_{p\geq p_k} G_{p+(q_k-p_k)}\mathcal{M}(V) \subset G_{p+p_0}\mathcal{M}(V), \end{aligned}$$

což dává kýžené tvrzení. ♠

Nechť $\mathcal{M}$ je $\mathcal{D}_X$-modul s filtrací F, která je zdola omezená a nechť

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to 0 \tag{2.8}$$

je exaktní posloupnost $\mathcal{D}_X$-modulů. Pak máme indukované filtrace na $\mathcal{L}$ a $\mathcal{N}$ definované předpisem

$$F_p\mathcal{L} = F_p\mathcal{M} \cap \mathcal{L}, \qquad F_p\mathcal{N} = \mathrm{Im}(F_p\mathcal{M} \to \mathcal{N}), \tag{2.9}$$

pro které máme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to \mathrm{gr}^F\mathcal{L} \to \mathrm{gr}^F\mathcal{M} \to \mathrm{gr}^F\mathcal{N} \to 0 \tag{2.10}$$

levých $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$-modulů.

Tvrzení 2.12. Nechť $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul. Pak lokálně na $\mathcal{M}$ existuje dobrá filtrace.

Důkaz. Uvažujme koherentní $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M}$. Pak pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x, nezáporná přirozená čísla $r_0, r_1 \in \mathbb{N}_0$ a exaktní posloupnost

$$(\mathcal{D}_X|_U)^{r_1} \to (\mathcal{D}_X|_U)^{r_0} \to \mathcal{M}|_U \to 0$$

levých $\mathcal{D}_X|_U$-modulů. ♠

Tvrzení 2.13. Nechť $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul s dobrou filtrací F na $\mathcal{M}$. Pak pro každý koherentní $\mathcal{D}_X$-podmodul $\mathcal{N}$ je $\{\mathcal{N} \cap F_p\mathcal{M}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ dobrá filtrace na $\mathcal{N}$.

Důkaz. ♠

Tvrzení 2.14. Nechť $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul a F je dobrá filtrace na $\mathcal{M}$. Pak pro každý $\mathcal{D}_X$-podmodul $\mathcal{N}$ jsou podmínky

(i) $\mathcal{N}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-podmodul,

(ii) $\mathcal{N} \cap F_p\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul pro každé $p \in \mathbb{Z}$

ekvivalentní.

Důkaz. Jestliže $\mathcal{N}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-podmodul, pak indukovaná filtrace $F_p\mathcal{N} = \mathcal{N} \cap F_p\mathcal{M}$ na $\mathcal{N}$ je dobrá filtrace, a proto $\mathcal{N} \cap F_p\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul.

Předpokládejme, že $\mathcal{N} \cap F_p\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul pro každé $p \in \mathbb{Z}$. Definujme

$$\mathcal{F}_p = \mathcal{D}_X(\mathcal{N} \cap F_p\mathcal{M})$$

pro každé $p \in \mathbb{N}_0$. Tedy $\mathcal{F}_p$ je $\mathcal{D}_X$-podmodul $\mathcal{M}$ generovaný $\mathcal{N} \cap F_p\mathcal{M}$. Nyní jelikož $\mathcal{N} \cap F_p\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul, je $\mathcal{F}_p$ lokálně konečně generovaný $\mathcal{D}_X$-modul. Protože $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul, je také $\mathcal{F}_p$ koherentní $\mathcal{D}_X$-modul. Navíc každý koherentní $\mathcal{D}_X$-modul je noetherovský, neboť $\mathcal{D}_X$ je noetherovský svazek okruhů. Tudíž rostoucí posloupnost $\{\mathcal{F}_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ koherentních $\mathcal{D}_X$-podmodulů je lokálně stacionární. Jelikož $\mathcal{N} = \cup_{p\in\mathbb{N}_0}\mathcal{F}_p$, obdržíme (2). ♠

2.3 Charakteristická varieta

V předešlé sekci jsem ukázali, že na koherentním $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M}$ lokálně existuje dobrá filtrace, která však není určena jednoznačně. Cílem této sekce je přiřadit koherentnímu $\mathcal{D}_X$-modulu $\mathcal{M}$ podmnožinu T^*X, která umožní definovat význačnou třídu koherentních $\mathcal{D}_X$-modulů.

Z věty 2.3 a 2.6 plyne, že inverzní obraz svazku $\pi_X^{-1}\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$ je podsvazek okruhů $\mathcal{O}_{T^*X}$.

Definice 2.15. Pro $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M}$ definujeme $\mathcal{O}_{T^*X}$-modul $\mathcal{M}^{\sim}$ jako

$$\mathcal{M}^{\sim} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi_X^{-1}\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X} \pi_X^{-1}\mathcal{M} \tag{2.11}$$

a budeme jej nazývat rozšířený $\mathcal{O}_{T^*X}$-modul.

Tvrzení 2.16. Okruh $\mathcal{O}_{T^*X,p}$ je plochý $(\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X)_{\pi_X(p)}$-modul pro každé $p \in T^*X$.

Důkaz. ♠

Tvrzení 2.17. Funktor

$$^{\sim}\colon \mathrm{Mod}(\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{T^*X}) \tag{2.12}$$

je exaktní. Pokud je navíc $\mathcal{M} \in \mathrm{Coh}(\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X)$, pak také $\mathcal{M}^{\sim} \in \mathrm{Coh}(\mathcal{O}_{T^*X})$.

Důkaz. Z předešlého tvrzení plyne, že $\mathcal{O}_{T^*X}$ je plochý $\pi_X^{-1}\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$-modul. Protože funktor inverzního obrazu $\pi_X^{-1}\colon \mathrm{Mod}(\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X) \to \mathrm{Mod}(\pi_X^{-1}\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X)$ je exaktní funktor, je i funktor

$$^{\sim}\colon \mathrm{Mod}(\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{T^*X})$$

exaktní.

Předpokládejme, že $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$-modul. Pak pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x, nezáporná přirozená čísla $r_0, r_1 \in \mathbb{N}_0$ a exaktní posloupnost

$$(\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X|_U)^{r_1} \to (\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X|_U)^{r_0} \to \mathcal{M}|_U \to 0$$

$\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X|_U$-modulů. Jelikož $^\sim$ je exaktní funktor a $(\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X|_U)^\sim = \mathcal{O}_{T^*X}|_{T^*U}$, obdržíme krátkou exaktní posloupnost

$$(\mathcal{O}_{T^*X}|_{T^*U})^{r_1} \to (\mathcal{O}_{T^*X}|_{T^*U})^{r_0} \to (\mathcal{M}|_U)^\sim \to 0$$

$\mathcal{O}_{T^*X}|_{T^*U}$-modulů. Protože $\mathcal{O}_{T^*X}$ je koherentní svazek okruhů, je $\mathcal{M}^\sim$ koherentní $\mathcal{O}_{T^*X}$-modul, neboť je lokálně konečně prezentovaný $\mathcal{O}_{T^*X}$-modul. ♠

Poznámka. Poznamenejme, že funktor

$$^\sim\colon \mathrm{Coh}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X) \to \mathrm{Coh}(\mathcal{O}_{T^*X})$$

je věrný, neboť Hilbertova věta o nulách (Hilbert's Nullstellensatz) dává vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi kónickými (conic) analytickými podmnožimami T^*X a radikály gradovaných a koherentních ideálů v $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$.

Definice 2.18. Nechť $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$-modul. Pak $\mathrm{Supp}(\mathcal{M}^\sim) \subset T^*X$ se nazývá *charakteristická varieta* (*chracteristic variety*) $\mathcal{M}$ a budeme ji značit $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ nebo $\mathrm{SS}(\mathcal{M})$.

Věta 2.19. Nechť $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul a F je dobrá filtrace na $\mathcal{M}$. Pak $\mathrm{Ch}(\mathrm{gr}^F\mathcal{M}) \subset T^*X$ nezávisí na volbě dobré filtrace F na $\mathcal{M}$.

Důkaz. Nechť F a F' jsou dvě dobré filtrace na $\mathcal{M}$. Potřebujeme ukázat, že

$$\mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^F\mathcal{M})^\sim) = \mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^{F'}\mathcal{M})^\sim).$$

Z tvrzení 2.11 vyplývá, že pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí V bodu x a $d \in \mathbb{N}$ splňující $F'_m\mathcal{M}|_V \subset F_{m+d}\mathcal{M}|_V$ pro každé $m \in \mathbb{Z}$. Definujeme-li filtraci F'' na $\mathcal{M}$ předpisem $F''_m\mathcal{M} = F_{m+d}\mathcal{M}$, pak F'' je také dobrá filtrace na $\mathcal{M}$ s splňuje $\mathrm{gr}^{F''}\mathcal{M} = \mathrm{gr}^F\mathcal{M}$. Nahrazením filtrace F filtrací F'' můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že $F'_m\mathcal{M}|_V \subset F_m\mathcal{M}|_V$ pro každé $m \in \mathbb{Z}$. Existuje tedy otevřené okolí $U \subset V$ bodu x a $d \in \mathbb{N}$ tak, že máme

$$F'_m\mathcal{M}|_U \subset F_m\mathcal{M}|_U \subset F'_{m+d}\mathcal{M}|_U$$

pro každé $m \in \mathbb{Z}$. Nyní ukážeme

$$\mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^F(\mathcal{M}|_U))^\sim) = \mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^{F'}(\mathcal{M}|_U))^\sim) \tag{$*$}$$

indukcí podle $d \geq 0$. Pro $d = 0$ je tvrzení triviální.

Pro $d = 1$ máme krátké exaktní posloupnosti

$$0 \to \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F'_m\mathcal{M}|_U/F_{m-1}\mathcal{M}|_U \to \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F_m\mathcal{M}|_U/F_{m-1}\mathcal{M}|_U \to \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F_m\mathcal{M}|_U/F'_m\mathcal{M}|_U \to 0,$$
$$0 \to \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F_{m-1}\mathcal{M}|_U/F'_{m-1}\mathcal{M}|_U \to \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F'_m\mathcal{M}|_U/F'_{m-1}\mathcal{M}|_U \to \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F'_m\mathcal{M}|_U/F_{m-1}\mathcal{M}|_U \to 0$$

$\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X|_U$-modulů. Označíme-li

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F'_m\mathcal{M}|_U/F_{m-1}\mathcal{M}|_U, \qquad \mathcal{N} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F_m\mathcal{M}|_U/F'_m\mathcal{M}|_U,$$

může předchozí exaktní posloupnosti $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X|_U$-modulů psát ve tvaru

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathrm{gr}^F\mathcal{M}|_U \to \mathcal{N} \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{N} \to \mathrm{gr}^{F'}\mathcal{M}|_U \to \mathcal{L} \to 0.$$

Protože $\widetilde{\ }$ je exaktní funktor, obdržíme krátké exaktní posloupnosti

$$0 \to \mathcal{L}^{\sim} \to (\mathrm{gr}^F(\mathcal{M}|_U))^{\sim} \to \mathcal{N}^{\sim} \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{N}^{\sim} \to (\mathrm{gr}^{F'}(\mathcal{M}|_U))^{\sim} \to \mathcal{L}^{\sim} \to 0$$

$\mathcal{O}_{T^*X}|_{T^*U}$-modulů. Tudíž máme

$$\mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^F(\mathcal{M}|_U))^{\sim}) = \mathrm{Supp}(\mathcal{L}^{\sim}) \cup \mathrm{Supp}(\mathcal{N}^{\sim}) = \mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^{F'}(\mathcal{M}|_U))^{\sim}),$$

což jsme chtěli ukázat.

Nyní dokážeme $(*)$ pro případ $d > 1$. Definujme filtraci F'' na $\mathcal{M}$ předpisem $F''_m\mathcal{M} = F_{m-1}\mathcal{M} + F'_m\mathcal{M}$, pak máme

$$F''_m\mathcal{M}|_U \subset F_m\mathcal{M}|_U \subset F''_{m+1}\mathcal{M}|_U$$

pro každé $m \in \mathbb{Z}$. Tedy z předešlého dostaneme

$$\mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^F(\mathcal{M}|_U))^{\sim}) = \mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^{F''}(\mathcal{M}|_U))^{\sim}).$$

Zároveň také máme

$$F'_m\mathcal{M}|_U \subset F''_m\mathcal{M}|_U \subset F'_{m+d-1}\mathcal{M}|_U$$

pro každé $m \in Z$. Tudíž z indukčního předpokladu obdržíme

$$\mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^{F'}(\mathcal{M}|_U))^{\sim}) = \mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^{F''}(\mathcal{M}|_U))^{\sim}),$$

což nám dává

$$\mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^F(\mathcal{M}|_U))^{\sim}) = \mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^{F'}(\mathcal{M}|_U))^{\sim}).$$

Poněvadž můžeme psát

$$\mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^F(\mathcal{M}|_U))^{\sim}) = \mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^F\mathcal{M})^{\sim}|_{T^*U}) = \mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^F\mathcal{M})^{\sim}) \cap T^*U,$$

obdržíme

$$\mathrm{Ch}(\mathrm{gr}^F\mathcal{M}) = \mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^F\mathcal{M})^{\sim}) = \mathrm{Supp}((\mathrm{gr}^{F'}\mathcal{M})^{\sim}) = \mathrm{Ch}(\mathrm{gr}^{F'}\mathcal{M}),$$

což bylo naším cílem. ♠

Dobrá filtrace na koherentním $\mathcal{D}_X$-modulu existuje pouze lokálně. Existuje příklad koherentního $\mathcal{D}_X$-modulu, který globálně nepřipouští dobrou filtraci. To vede k následující definici charakteristické variety koherentního $\mathcal{D}_X$-modulu.

Definice 2.20. Charakteristická varieta $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ koherentního $\mathcal{D}_X$-modulu $\mathcal{M}$ je jednoznačně určená uzavřená podmnožina T^*X taková, že

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \cap \pi_X^{-1}(U) = \mathrm{Ch}(\mathrm{gr}^F(\mathcal{M}|_U))$$

pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ a dobrou filtraci F na $\mathcal{M}|_U$.

Tvrzení 2.21. Nechť $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul. Pak

(i) $\mathrm{Supp}(\mathcal{M}) = \pi_X(\mathrm{Ch}(\mathcal{M}))$,

(ii) $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ je kónická (tj. invariantní vůči akci $\mathbb{C}^\times$ na T^*X) analytická podmnožina T^*X (conic analytic subset).

Důkaz. (i) Jelikož $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul, existuje pro každé $x \in X$ otevřené okolí U bodu x a dobrá filtrace F na $\mathcal{M}|_U$. Pak máme

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{M}) \cap U = \operatorname{Supp}(\mathcal{M}|_U),$$
$$\pi_X(\operatorname{Ch}(\mathcal{M})) \cap U = \pi_X(\operatorname{Ch}(\mathcal{M}) \cap \pi_X^{-1}(U)) = \pi_X(\operatorname{Ch}(\operatorname{gr}^F(\mathcal{M}|_U))),$$

tudíž se lze omezit na případ, kdy na $\mathcal{M}$ existuje dobrá filtrace F.

Protože $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{D}_X$-modul, je $\operatorname{Supp}(\mathcal{M}) = \{x \in X;\, \mathcal{M}_x \neq 0\}$. Obdobně jelikož $(\operatorname{gr}^F\mathcal{M})^\sim$ je koherentní $\mathcal{O}_{T^*X}$-modul, máme

$$\operatorname{Ch}(\operatorname{gr}^F\mathcal{M}) = \operatorname{Supp}((\operatorname{gr}^F\mathcal{M})^\sim) = \{p \in T^*X;\, (\operatorname{gr}^F\mathcal{M})^\sim{}_p \neq 0\}.$$

Dále můžeme psát

$$(\operatorname{gr}^F\mathcal{M})^\sim{}_p = \mathcal{O}_{T^*X,p} \otimes_{(\pi_X^{-1}\operatorname{gr}^F\mathcal{D}_X)_p} (\pi_X^{-1}\operatorname{gr}^F\mathcal{M})_p$$

pro každé $p \in T^*X$. Nyní jestliže $x \in \pi_X(\operatorname{Ch}(\mathcal{M}))$, pak existuje $p \in \operatorname{Ch}(\mathcal{M})$ splňující $\pi_X(p) = x$. Tedy $\mathcal{M}_x \neq 0$, neboť $(\operatorname{gr}^F\mathcal{M})^\sim{}_p \neq 0$, a proto máme $x \in \operatorname{Supp}(\mathcal{M})$. Tím máme dokázáno $\pi_X(\operatorname{Ch}(\mathcal{M})) \subset \operatorname{Supp}(\mathcal{M})$. Pokud $x \in \operatorname{Supp}(\mathcal{M})$, pak máme $\mathcal{M}_x \neq 0$. Pro každé $p \in \pi_X^{-1}(x)$ můžeme psát

$$(\operatorname{gr}^F\mathcal{M})^\sim{}_p = \mathcal{O}_{T^*X,p} \otimes_{(\operatorname{gr}^F\mathcal{D}_X)_x} \mathcal{M}_x$$

(ii) ♠

Proč musí existovat p, aby to nebyla nula?

Tvrzení 2.22. Pro krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$$

koherentních $\mathcal{D}_X$-modulů máme $\operatorname{Ch}(\mathcal{M}) = \operatorname{Ch}(\mathcal{M}') \cup \operatorname{Ch}(\mathcal{M}'')$.

Důkaz. ♠

Věta 2.23. Pro každý koherentní $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M}$ je jeho charakteristická varieta $\operatorname{Ch}(\mathcal{M})$ involutivní vzhledem ke kanonické symplektické struktuře na kotečném bandlu T^*X. Navíc pro každou ireducibilní komponentu Λ charakteristické variety $\operatorname{Ch}(\mathcal{M})$ máme $\dim \Lambda \geq \dim X$.

Důkaz. ♠

2.4 Holonomní $\mathcal{D}_X$-moduly

Definice 2.24. Řekneme, že koherentní $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M}$ je *holonomní* $\mathcal{D}_X$-modul, pokud $\dim \operatorname{Ch}(\mathcal{M}) \leq \dim X$.

3 b-funkce

3.1 Motivace pro b-funkce

Na hladké reálné varietě $X_\mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ uvažujme prostor testovacích funkcí $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, tj. prostor hladkých funkcí z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{C}$, jež mají kompaktní nosič. Komplexní vektorový prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ lze opatřit topologií následujícím způsobem. Řekneme, že posloupnost $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ konverguje k $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, jestliže existuje kompaktní množina $K \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset K$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $\partial^\alpha\varphi_k \rightrightarrows \partial^\alpha\varphi$ na $\mathbb{R}^n$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Topologie definovaná systémem konvergentních posloupností v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ zadává na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ strukturu úplného lokálně konvexního topologického vektorového prostoru.

Distribuce na $\mathbb{R}^n$ je pak spojitý lineární funkcionál $T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Komplexní vektorový prostor všech distribucí na $\mathbb{R}^n$ budeme značit $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je hladká funkce. Pak pro $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re}(s) > 0$ definujeme spojitou funkci $f_+^s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ předpisem

$$f_+^s(x) = \begin{cases} f(x)^s & \text{pro } f(x) > 0, \\ 0 & \text{pro } f(x) \leq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

a spojitou funkci $f_-^s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ předpisem

$$f_-^s(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } f(x) \geq 0, \\ (-f(x))^s & \text{pro } f(x) < 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Z definice funkcí f_+^s a f_-^s ihned plyne, že $f_-^s = (-f)_+^s$, a proto se v dalším můžeme omezit pouze na funkci f_+^s.

Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $s \mapsto f_+^s(x)$ holomorfní funkce na otevřené množině $\{s \in \mathbb{C};\, \operatorname{Re}(s) > 0\} \subset \mathbb{C}$. Dále pro každé $s \in \mathbb{C}$, jež splňuje $\operatorname{Re}(s) > 0$, definujeme distribuci $Y_f(s) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vztahem

$$\langle Y_f(s), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_+^s(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x \tag{3.3}$$

pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Systém distribucí $Y_f(s)$ závisí holomorfně na s, neboť pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \langle Y_f(s), \varphi \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_{\mathbb{R}^n} f_+^s(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f_+^s(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x, \tag{3.4}$$

kde spojitá funkce $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f_+^s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je dána předpisem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f_+^s(x) = \begin{cases} f(x)^s \log f(x) & \text{pro } f(x) > 0, \\ 0 & \text{pro } f(x) \leq 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Problém. V roce 1954 na Mezinárodním kongresu matematiků v Amsterdamu I. M. Gelfand položil otázku, zda holomorfní systém distribucí $Y_f(s)$ definovaný na polorovině $\operatorname{Re}(s) > 0$ lze rozšířit na meromorfní systém distribucí na celé komplexní rovině $\mathbb{C}$.

Mějme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x) = x$ a uvažujme derivaci distribuce $Y_f'(s+1)$ pro $\operatorname{Re}(s) > 0$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned}
\langle Y_f'(s+1), \varphi \rangle &= -\langle Y_f(s+1), \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f_+^{s+1}(x)\varphi'(x)\, \mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x^{s+1}\varphi'(x)\, \mathrm{d}x \\
&= -[x^{s+1}\varphi(x)]_0^{+\infty} + (s+1)\int_0^{+\infty} x^s \varphi(x)\, \mathrm{d}x = (s+1)\int_{\mathbb{R}} f_+^s(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x \\
&= (s+1)\langle Y_f(s), \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

což nám dává $Y_f'(s+1) = (s+1)Y_f(s)$ pro $\operatorname{Re}(s) > 0$. Definujeme-li diferenciální operátor $P(s) = \partial_x$ na $\mathbb{R}$ a polynom $b(s) = s+1$, pak máme

$$P(s)(Y_f(s+1)) = b(s)Y_f(s) \tag{3.6}$$

pro $\operatorname{Re}(s) > 0$, což lze ještě přepsat do tvaru

$$\langle Y_f(s+1), P(s)^*(\varphi) \rangle = b(s)\langle Y_f(s), \varphi \rangle, \tag{3.7}$$

kde diferenciální operátor $P(s)^*$ je formálně adjungovaný operátor k operátoru $P(s)$.

Formálně adjungovaný operátor $P(s)^*$ je pro $P(s) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n)[s]$ definován předpisem

$$P(s)^* = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha(s)\, \partial_x^\alpha \tag{3.8}$$

pro

$$P(s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha(s)\, \partial_x^\alpha, \tag{3.9}$$

kde $a_\alpha(s) \in \mathbb{R}[s]$.

Jelikož levá strana rovnice (3.7) je holomorfní funkce na množině $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > -1\}$, můžeme definovat meromorfní rozšíření distribuce $Y_f(s)$ na polorovině $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > -1\}$ s póly v bodech $s \in \mathbb{C}$, jež splňují $b(s) = 0$ a $-1 < \mathrm{Re}(s) \leq 0$, předpisem

$$\langle Y_f(s), \varphi \rangle = \frac{1}{b(s)} \int_{\mathbb{R}} f_+^{s+1}(x)(P(s)^*(\varphi))(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

Iterací tohoto procesu obdržíme pro $p \in \mathbb{N}$ meromorfní rozšíření distribuce $Y_f(s)$ na polorovině $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > -p\}$ s póly v bodech $s \in \mathbb{C}$, jež splňují $-p < \mathrm{Re}(s) \leq 0$ a $b(s+i) = 0$ pro nějaké $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, které je dáno vztahem

$$\langle Y_f(s), \varphi \rangle = \frac{1}{b(s+p-1) \cdots b(s)} \int_{\mathbb{R}} f_+^{s+p}(x)(P(s+p-1)^* \cdots P(s)^*(\varphi))(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

Pro $f(x) = x$ tedy obdržíme, že $Y_f(s)$ je meromorfní systém distribucí na $\mathbb{C}$ s póly řádu 1 v bodech $s \in \{-1, -2, \ldots\}$. Navíc máme

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Res}_{-1-n}\, Y_f(s), \varphi \rangle &= \mathrm{Res}_{-1-n} \langle Y_f(s), \varphi \rangle = \mathrm{Res}_{-1-n}\, \frac{(-1)^{n+2} \langle Y_f(s+n+2), \varphi^{(n+2)} \rangle}{(s+n+2)(s+n+1)(s+n) \cdots (s+1)} \\
&= \lim_{s \to -1-n} \frac{(-1)^n}{(s+n+2)(s+n) \cdots (s+1)} \int_0^{+\infty} x^{s+n+2} \varphi^{(n+2)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x \varphi^{(n+2)}(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} \varphi^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n!}\, \varphi^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n}{n!}\, \langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

tudíž obdržíme

$$\mathrm{Res}_{-1-n}\, Y_f(s) = \frac{(-1)^n}{n!}\, \delta^{(n)} \tag{3.12}$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$.

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je hladká funkce a nechť existuje diferenciální operátor $P(s) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n)[s]$ a nenulový polynom $b(s) \in \mathbb{R}[s]$ splňující

$$P(s)|_{U_+}(f(x)^{s+1}) = b(s) f(x)^s, \tag{3.13}$$

kde $U_+ = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) > 0\}$. Pak pro $\mathrm{Re}(s) > 0$ můžeme psát

$$\begin{aligned}
b(s) \langle Y_f(s), \varphi \rangle &= b(s) \int_{\mathbb{R}^n} f_+^s(x) \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{U_+} b(s) f(x)^s \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{U_+} P(s)|_{U_+}(f(x)^{s+1}) \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{U_+} f(x)^{s+1} P(s)^*|_{U_+}(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f_+^{s+1}(x) P(s)^*(\varphi(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \langle Y_f(s+1), P(s)^*(\varphi) \rangle,
\end{aligned}$$

což nám dává kýženou rovnici

$$b(s)\langle Y_f(s), \varphi\rangle = \langle Y_f(s+1), P(s)^*(\varphi)\rangle \tag{3.14}$$

pro $\mathrm{Re}(s) > 0$, kterou lze využít k meromorfnímu rozšíření systému distribucí $Y_f(s)$ na celou komplexní rovinu $\mathbb{C}$.

Z předchozích úvah plyne, že k tomu abychom holomorfní systém distribucí $Y_f(s)$ definovaný na $\mathrm{Re}(s) > 0$, rozšířili na meromorfní systém distribucí na $\mathbb{C}$, nám postačí existence diferenciálního operátoru $P(s) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n)[s]$ a polynomu $b(s)$ splňující (3.15). Ideální je samozřejmě najít takový polynom $b(s)$, který bude mít minimální stupeň, neboť kořeny tohoto polynomu velmi úzce souvisí se singularitami daného meromorfního rozšíření.

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je hladká funkce. Množinu všech polynomů $b(s) \in \mathbb{R}[s]$, pro které existuje diferenciální operátor $P(s) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n)[s]$ takový, že pro každé $s \in \mathbb{C}$ je

$$P(s)|_{U_+}(f(x)^{s+1}) = b(s)f(x)^s, \tag{3.15}$$

kde $U_+ = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) > 0\}$, označíme $\mathcal{B}_f$.

Snadno nahlédneme, že $\mathcal{B}_f$ je ideál v $\mathbb{R}[s]$. Jelikož $\mathbb{R}[s]$ je obor hlavních ideálů, je každý ideál hlavní, tj. je generován jediným elementem. Pokud $\mathcal{B}_f$ je nenulový ideál, pak monický generátor tohoto ideálu se nazývá *b-funkce* nebo *Bernsteinův–Satoův polynom* funkce f a budeme jej značit $b_f(s)$ nebo $b(s)$.

Dále přímo z definice plyne, že Bernsteinův–Satoův polynom $b(s)$ funkce f je určen jednoznačně a je to nenulový monický polynom minimálního stupně, pro který existuje diferenciální operátor $P(s) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n)[s]$ splňující (3.15)

Poznamenejme, že diferenciální operátor $P(s)$ odpovídající b-funkci $b(s)$ není určen jednoznačně.

Otázkou zůstává, zda pro každou hladkou funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existuje Bernsteinův–Satoův polynom $b(s)$. Uveďme pro představu několik příkladů.

Příklad. Nechť hladká funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňuje $f(x) \le 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$. Pak $b(s) = 1$, jelikož $U_+ = \emptyset$.

Příklad. Nechť hladká funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňuje $f(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$. Pak $b(s) = 1$, jelikož můžeme například zvolit diferenciální operátor $P(s) = \frac{1}{f}$.

Příklad. Mnohem zajímavější situace nastane, pokud $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je nenulová hladká funkce a $f^{-1}(0)$ a U_+ jsou neprázdné množiny. Předpokládejme, že existuje b-funkce $b(s)$. Pak máme

$$P(s)|_{U_+}(f(x)^{s+1}) = b(s)f(x)^s,$$

což pro $s = -1$ dává

$$P(-1)|_{U_+}(1) = b(-1)\frac{1}{f(x)}.$$

Označíme-li $g = P(-1)(1) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, pak obdržíme

$$f(x)g(x) = b(-1)$$

pro každé $x \in U_+$. Poněvadž $\overline{U_+} \cap f^{-1}(0) \neq \emptyset$, existuje $x_0 \in f^{-1}(0)$ a posloupnost $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ v U_+ taková, že $x_k \to x_0$. Jelikož f a g jsou spojité funkce, obdržíme

$$f(x_0)g(x_0) = b(-1).$$

Avšak $f(x_0) = 0$, tudíž $b(-1) = 0$.

Tedy pokud $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je hladká funkce a U_+ a $f^{-1}(0)$ jsou neprázdné množiny, pak b-funkci $b(s)$, za předpokladu že existuje, lze psát ve tvaru

$$b(s) = (s+1)\tilde{b}(s), \tag{3.16}$$

kde $\tilde{b}(s) \in \mathbb{R}[s]$ je monický polynom.

Lemma 3.1. Nechť X je souvislý topologický prostor a $f\colon X \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Označme $X_+ = \{x \in X;\ f(x) > 0\}$ a $X_0 = \{x \in X;\ f(x) = 0\}$. Jestliže X_+ a X_0 jsou neprázdné množiny, pak $\overline{X_+} \cap X_0 \neq \emptyset$.

Důkaz. Jelikož f je spojitá funkce, je $X_+ \cup X_0$ uzavřená množina. Tudíž máme $\overline{X_+} \subset X_+ \cup X_0$. Pokud $\overline{X_+} \cap X_0 = \emptyset$, pak $\overline{X_+} \subset X_+$, což implikuje, že množina X_+ je otevřená i uzavřená. Avšak topologický prostor X je souvislý, proto by množina X_+ musela být buď prázdná nebo celý prostor X, což je ve sporu, neboť $X_0 \neq \emptyset$. Tedy obdržíme $\overline{X_+} \cap X_0 \neq \emptyset$. ♠

Předpokládejme navíc ještě, že funkce f nemá žádný singulární bod, tj. pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ je $df(x) \neq 0$, pak $b(s) = s + 1$. Snadno ověříme, že operátor

$$P(s) = \frac{1}{\partial_{x_1}(f) + \partial_{x_2}(f) \cdots + \partial_{x_n}(f)} \left(\partial_{x_1} + \partial_{x_2} + \cdots + \partial_{x_n}\right)$$

splňuje (3.15), neboť máme

$$\partial_{x_i}|_{U_+}(f(x)^{s+1}) = (s+1)f(x)^s \partial_{x_i}(f)$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Příklad. Uvažujme nyní funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Pak máme

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i}|_{U_+}(f(x)^{s+1}) &= 2(s+1)x_i f(x)^s, \\
\partial_{x_i}^2|_{U_+}(f(x)^{s+1}) &= 4s(s+1)x_i^2 f(x)^{s-1} + 2(s+1)f(x)^s.
\end{aligned}$$

Tudíž $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ splňuje

$$\begin{aligned}
\Delta|_{U_+}(f(x)^{s+1}) &= 4s(s+1)f(x)f(x)^{s-1} + 2n(s+1)f(x)^s \\
&= 4(s+1)\big(s + \tfrac{n}{2}\big)f(x)^s.
\end{aligned}$$

Tedy $b(s) = (s+1)(s + \frac{n}{2})$ je b-funkce a $P(s) = \frac{1}{4}\Delta$.

Příklad. Uveďme ještě jeden příklad, kdy funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $f(x, y) = x^2 + y^3$. Pak b-funkce je

$$b(s) = (s+1)\big(s + \tfrac{5}{6}\big)\big(s + \tfrac{7}{6}\big)$$

a

$$P(s) = \frac{y}{12}\,\partial_x^2\partial_y + \frac{1}{27}\,\partial_y^3 + \frac{3}{8}\,\partial_x^2 + \frac{s}{4}\,\partial_x^2$$

je odpovídající diferenciální operátor. Z tohoto příkladu je také zřejmé, že nalezení b-funkce a odpovídajícího operátoru je poměrně komplikované, byť funkce f není nikterak složitá.

3.2 Meromorfní funkce

Uvažujme komplexní varietu X. Pak pro každé $x \in X$ je $\mathcal{O}_{X,x}$ obor integrity. Můžeme tedy zkonstruovat odpovídající podílové těleso, které budeme značit $Q(\mathcal{O}_{X,x})$. Nechť $U \subset X$ je otevřená množina. Zobrazení

$$f\colon U \to \coprod_{x \in U} Q(\mathcal{O}_{X,x}) \tag{3.17}$$

se nazývá meromorfní funkce na U, jestliže pro každé $x \in U$ je $f(x) \in Q(\mathcal{O}_{X,x})$ a navíc pro každé $x \in U$ existuje otevřené okolí $V \subset U$ bodu x a holomorfní funkce $g, h \in \mathcal{O}_X(V)$ takové, že $h \not\equiv 0$ a pro každé $y \in V$ je $f(y) = \frac{g}{h}$ v $Q(\mathcal{O}_{X,y})$. Množinu všech meromorfních funkcí na U budeme značit

$\mathcal{K}_X(U)$. Snadno se ověří, že $\mathcal{K}_X(U)$ je okruh. Jsou-li $V \subset U$ otevřené množiny, pak přirozená restrikce $\mathcal{K}_X(U) \to \mathcal{K}_X(V)$ je morfismus okruhů. Navíc přiřazení

$$U \mapsto \mathcal{K}_X(U) \tag{3.18}$$

je svazek okruhů, který budeme nazývat *svazek meromofních funkcí* na X.

Tvrzení 3.2. Nechť $\mathcal{K}_X$ je svazek meromorfních funkcí na komplexní varietě X. Pak pro každé $x \in X$ je stéblo $\mathcal{K}_{X,x}$ izomorfní podílovému tělesu $Q(\mathcal{O}_{X,x})$.

Důkaz. ♠

Nechť X je komplexní varieta. Uvažujme otevřenou množinu $U \subset X$ a meromorfní funkci $f \in \mathcal{K}_X(U)$. Bod $x \in U$ se nazývá *pól* meromorfní funkce f, jestliže $f(x) \notin \mathcal{O}_{X,x}$. Dále označme $P_f \subset U$ množinu všech pólů funkce f. Pokud funkce $1/f$ je meromorfní funkce na U, pak $Z_f \subset U$ bude značit množinu všech kořenů funkce f. Pro každé $x \in U \setminus (Z_f \cap P_f)$ je buď $f(x) \in \mathcal{O}_{X,x}$ nebo $(1/f)(x) \in \mathcal{O}_{X,x}$, tudíž f definuje holomorfní funkci $U \setminus (Z_f \cap P_f) \to \mathbb{CP}^1$.

Věta 3.3. Pro každou meromorfní funkci $f \in \mathcal{K}_X(U)$ jsou množiny P_f, Z_f a $P_f \cap Z_f$ analytické podmnožiny X.

Důkaz. ♠

3.3 $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{O}_X[s, f^{-1}] \otimes f^s$

Nechť X je komplexní varieta a nechť $f \in \mathcal{O}_X(X)$ je holomorfní funkce na X, která je nenulová na každé komponentě souvislosti X. Pak $Z = \{x \in X;\, f(x) = 0\} \subset X$ je analytická nadplocha. Jsou-li $V \subset U$ otevřené podmnožiny X, pak morfismus okruhů $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ indukuje přirozený morfismus lokalizovaných okruhů $(\mathcal{O}_X(U))_{f|_U} \to (\mathcal{O}_X(V))_{f|_V}$. Tudíž přiřazení

$$U \mapsto (\mathcal{O}_X(U))_{f|_U} \tag{3.19}$$

je předsvazek okruhů na X. Svazek okruhů $\mathcal{O}_X[f^{-1}]$ definujeme jako svazek asociovaný k tomuto předsvazku. Navíc máme kanonické vnoření svazků okruhů $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X[f^{-1}]$, tudíž $\mathcal{O}_X[f^{-1}]$ je $\mathcal{O}_X$-modul. Dokonce lze na $\mathcal{O}_X[f^{-1}]$ definovat strukturu levého $\mathcal{D}_X$-modulu následujícím způsobem. Nechť $U \subset X$ je otevřená množina, pak zobrazení

$$\begin{gathered}\Theta_X(U) \times (\mathcal{O}_X(U))_{f|_U} \to (\mathcal{O}_X(U))_{f|_U}\\ (\xi, gf^{-m}) \mapsto \xi(g)f^{-m} - mg\xi(f)f^{-m-1}\end{gathered}$$

zadávají na $\mathcal{O}_X[f^{-1}]$, s využitím lemmatu 1.19, strukturu levého $\mathcal{D}_X$-modulu. Dále definujeme $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{O}_X[s, f^{-1}]$ vztahem

$$\mathcal{O}_X[s, f^{-1}] = \mathbb{C}[s]_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{O}_X[f^{-1}], \tag{3.20}$$

kde $\mathbb{C}[s]_X$ značí konstantní svazek se stéblem $\mathbb{C}[s]$. Dále nechť $U \subset X$ je otevřená množina, pak zobrazení definovaná předpisem

$$\begin{gathered}\Theta_X(U) \times \mathcal{O}_X[s, f^{-1}](U) \to \mathcal{O}_X[s, f^{-1}](U),\\ (\xi, a(s) \otimes \varphi) \mapsto a(s) \otimes \xi(\varphi) + sa(s) \otimes \varphi\xi(f)f^{-1}\end{gathered}$$

definují na $\mathcal{O}_X[s, f^{-1}]$ strukturu levého $\mathcal{D}_X$-modulu.

Označení. Levý $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{O}_X[s, f^{-1}]$ budeme v dalším značit $\mathcal{O}_X[s, f^{-1}] \otimes f^s$. Označení odráží skutečnost, že struktura levého $\mathcal{D}_X$-modulu odpovídá formuli

$$\xi(f^s) = s\xi(f)f^{s-1}, \tag{3.21}$$

kde $\xi \in \Theta_X(U)$ a $s \in \mathbb{N}_0$. Řezy $\mathcal{O}_X[s, f^{-1}] \otimes f^s(U)$ budeme značit $\varphi \otimes f^s$, kde $\varphi \in \mathcal{O}_X[s, f^{-1}](U)$.

Nechť $\mathcal{M}$ je holonomní $\mathcal{D}_X$-modul. Jelikož $\mathcal{M}[s, f^{-1}] \otimes f^s$ má kanonickou strukturu levého $\mathbb{C}[s]_X$-modulu a

Definujme svazek okruhů $\mathcal{D}_X[s]$ na X předpisem

$$\mathcal{D}_X[s] = \mathbb{C}[s]_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{D}_X. \tag{3.22}$$

Poněvadž levá akce $\mathcal{D}_X$ a levá akce $\mathbb{C}[s]_X$ na $\mathcal{M}[s, f^{-1}] \otimes f^s$ vzájemně komutují, má $\mathcal{M}[s, f^{-1}] \otimes f^s$ strukturu levého $\mathcal{D}_X[s]$-modulu.

Lemma 3.4. Existuje injektivní morfismus $\mathcal{D}_X$-modulů $\tau\colon \mathcal{M}[s, f^{-1}] \otimes f^s \to \mathcal{M}[s, f^{-1}] \otimes f^s$ splňující

$$\tau \circ m_s = m_{s+1} \circ \tau,$$

kde morfismus $\mathcal{D}_X$-modulů $m_s\colon \mathcal{M}[s, f^{-1}] \otimes f^s \to \mathcal{M}[s, f^{-1}] \otimes f^s$ je násobení elementem s.

Důkaz. ♠

Pak $Z = \{x \in X;\ f(x) = 0\}$ je analytická podmnožina X nemající vnitřní bod. Dále označíme $\mathcal{O}_X(\star Z)$ svazek meromorfních funkcí na X mající póly v Z, tj.

$$\mathcal{O}_X(\star Z)(U) = \{f \in \mathcal{K}_X(U);\ P_f \subset Z\} \tag{3.23}$$

pro každou otevřenou množinu $U \subset X$.

4 Meromorfní integrabilní konexe

Ke každému lokálnímu systému $\mathcal{L}$ na komplexní varietě X existuje $\mathcal{D}_X$-modul (integrabilní konexe)

$$\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L}.$$

Jelikož charakteristická varieta $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ je nulový řez v T^*X, tj. $\mathrm{Ch}(\mathcal{M}) = T^*_X X$, je $\mathcal{M}$ holonomní $\mathcal{D}_X$-modul.

Definice 4.1. Nechť X je komplexní varieta a $T \subset X$ analytická nadplocha. Holonomní $\mathcal{D}_X$-modul $\mathcal{M}$, takový že $\mathcal{M}|_{X \setminus T}$ je integrabilní konexe na $X \setminus T$ a $\mathcal{M} = \mathcal{M}[*T]$, se nazývá *meromorfní konexe podél* T. Dále definujeme kategorii $\mathrm{Con}(\mathcal{D}_X; T)$ (kategorie meromorfních konexí podél T) jako úplnou podkategorii $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ sestávající z meromorfních konexí podél T.

Tvrzení 4.2. Nechť $\mathcal{M}$ je $\mathcal{D}_X$-modul takový, že

$$\mathcal{M} = \mathcal{O}_X[*T] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F},$$

kde $\mathcal{F}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul, jako $\mathcal{O}_X$-modul. Pak $\mathcal{M}$ je meromorfní konexe podél T.

Důkaz. ♠

A Svazky

Definice A.1. Nechť X je topologický prostor a nechť A je abelovská grupa. Pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ označíme $A_X(U)$ množinu všech spojitých zobrazení z U do A, přičemž na A uvažujeme diskrétní topologii. Pak

$$U \mapsto A_X(U) \tag{A.1}$$

je svazek abelovských grup na X a budeme jej nazývat *konstantní svazek na* X *se stéblem* A.

Poznamenejme, že pokud je A_X konstantní svazek na X se stéblem A, pak $(A_X)_x = A$ pro všechna $x \in X$.

Definice A.2. Nechť $\mathcal{R}$ je svazek okruhů na topologickém prostoru X.

(i) Pro $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{R})$ je svazek $\mathcal{R}$-lineárních morfismů $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathrm{Sh}(X)$ definován předpisem

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) \tag{A.2}$$

pro každou otevřenou množinu $U \subset X$. Svazek $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ se nazývá svazek řešení $\mathcal{F}$ v $\mathcal{G}$ (nad $\mathcal{R}$). Navíc

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\bullet, \bullet)\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{R})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mod}(\mathcal{R}) \to \mathrm{Sh}(X) \tag{A.3}$$

je levý exaktní bifunktor. Přímo z definice plyne, že $\Gamma(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

(ii) Pro $\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{R}^{\mathrm{op}})$ a $\mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{R})$ je tenzorový součin $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G} \in \mathrm{Sh}(X)$ svazek asociovaný k předsvazku, jenž je definován předpisem

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} \mathcal{G}(U) \tag{A.4}$$

pro každou otevřenou množinu $U \subset X$. Svazek $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}$ se nazývá tenzorový součin $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ (nad $\mathcal{R}$). Navíc

$$\bullet \otimes_{\mathcal{R}} \bullet\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{R}^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{Mod}(\mathcal{R}) \to \mathrm{Sh}(X) \tag{A.5}$$

je pravý exaktní bifunktor.

Poznamenejme, že pokud $\mathcal{R}$ je svazek komutativních okruhů, pak $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ i $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}$ je $\mathcal{R}$-modul. Přirozený morfismus

$$(\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \tag{A.6}$$

není obecně ani injektivní ani surjektivní. Na druhou stranu přirozený morfismus

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G})_x \to \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{R}_x} \mathcal{G}_x \tag{A.7}$$

je izomorfismus.

Definice A.3. Řekneme, že $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{R})$ je *injektivní* respektive *projektivní* objekt v kategorii $\mathrm{Mod}(\mathcal{R})$, jestliže funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\bullet, \mathcal{M})$ respektive $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \bullet)$ je exaktní.

Tvrzení A.4. Nechť $\mathcal{R}$ je svazek okruhů na topologickém prostoru X. Pak abelovská kategorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{R})$ má *dostatek injektivních objektů.*

Injektivní objekt v kategorii $\mathrm{Mod}(\mathcal{R})$ se někdy nazývá *injektivní* $\mathcal{R}$-modul.

Definice A.5. Řekneme, že $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{R})$ je *plochý* $\mathcal{R}$-modul, jestliže funktor

$$\bullet \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{R}^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{Sh}(X)$$

je exaktní.

Z definice tenzorového součinu plyne, že $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{R})$ je plochý $\mathcal{R}$-modul, právě tehdy když stéblo $\mathcal{M}_x$ je plochý $\mathcal{R}_x$-modul pro každé $x \in X$. Ačkoliv kategorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{R})$ nemá obecně dostatek projektivních objektů, máme následující tvrzení.

Tvrzení A.6. Nechť $\mathcal{R}$ je svazek okruhů na topologickém prostoru X. Pak pro každý $\mathcal{R}$-modul $\mathcal{M}$ existuje plochý $\mathcal{R}$-modul $\mathcal{P}$ a exaktní posloupnost $\mathcal{P} \to \mathcal{M} \to 0$.

Definice A.7. Nechť $\mathcal{R}$ je svazek okruhů na topologickém prostoru X.

(i) Řekneme, že (levý) $\mathcal{R}$-modul $\mathcal{M}$ je *lokálně konečně generovaný*, jestliže pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x, nezáporné přirozené číslo $r_0 \in \mathbb{N}_0$ a exaktní posloupnost

$$(\mathcal{R}|_U)^{r_0} \to \mathcal{M}|_U \to 0 \tag{A.8}$$

levých $\mathcal{R}|_U$-modulů.

(ii) Řekneme, že (levý) $\mathcal{R}$-modul $\mathcal{M}$ je *lokálně konečně prezentovaný*, jestliže pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x, nezáporná přirozená čísla $r_0, r_1 \in \mathbb{N}_0$ a exaktní posloupnost

$$(\mathcal{R}|_U)^{r_1} \to (\mathcal{R}|_U)^{r_0} \to \mathcal{M}|_U \to 0 \tag{A.9}$$

levých $\mathcal{R}|_U$-modulů.

Tvrzení A.8. Nechť $\mathcal{R}$ je svazek okruhů na topologickém prostoru X a nechť $\mathcal{F}$ je lokálně konečně generovaný $\mathcal{R}$-modul. Dále nechť $\mathcal{F}_x = 0$ pro $x \in X$. Pak existuje otevřené okolí U bodu x takové, že $\mathcal{F}|_U = 0$.

Důkaz. Jelikož $\mathcal{F}$ je lokálně konečně generovaný $\mathcal{R}$-modul, existuje otevřené okolí U bodu x, nezáporné přirozené číslo $r \in \mathbb{N}_0$ a krátká exaktní posloupnost

$$(\mathcal{R}|_U)^r \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}|_U \to 0$$

$\mathcal{R}|_U$-modulů. Označíme-li $e_1, e_2, \dots, e_r \in \mathcal{R}(U)^r$ kanonické volné gererátory $\mathcal{R}|_U$-modulu $(\mathcal{R}|_U)^r$, pak z předpokladu plyne, že $(\varphi_U(e_i))_x = \varphi_x(e_{i,x}) = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, r$. Existuje tedy otevřené okolí $V \subset U$ bodu x takové, že $\varphi_U(e_i)|_V = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, r$. Tedy pro každé $y \in V$ obdržíme $\varphi_y(e_{i,y}) = (\varphi_V(e_i|_V))_y = 0$. Avšak elementy $\varphi_y(e_{i,y})$ pro $i = 1, 2, \dots, r$ generují $\mathcal{R}_y$-modul $\mathcal{F}_y$. Tudíž $\mathcal{F}_y = 0$ pro každé $y \in V$, což implikuje $\mathcal{F}|_V = 0$. ♠

Tvrzení A.9. Nechť $\mathcal{R}$ je svazek okruhů na topologickém prostoru X a nechť $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ jsou (levé) $\mathcal{R}$-moduly. Pro $x \in X$ označme

$$\varphi_x \colon (\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \tag{A.10}$$

kanonický morfismus.

(i) Jestliže $\mathcal{F}$ je lokálně konečně generovaný $\mathcal{R}$-modul, pak φ_x je injektivní.
(ii) Jestliže $\mathcal{F}$ je lokálně konečně prezentovaný $\mathcal{R}$-modul, pak φ_x je izomorfismus.

Definice A.10. Nechť $\mathcal{R}$ je svazek okruhů na topologickém prostoru X. Řekneme, že (levý) $\mathcal{R}$-modul $\mathcal{M}$ je *koherentní* $\mathcal{R}$-modul, jestli je lokálně konečně generovaný a jestliže pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ všechny lokálně konečně generované $\mathcal{R}|_U$-podmoduly $\mathcal{M}|_U$ jsou lokálně konečně prezentované.

Svazek okruhů $\mathcal{R}$ se nazývá levý *koherentní svazek okruhů*, jestliže $\mathcal{R}$ je koherentní $\mathcal{R}$-modul jako levý $\mathcal{R}$-modul.

Tvrzení A.11.

(i) Nechť $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ je exaktní posloupnost $\mathcal{R}$-modulů. Jestliže $\mathcal{M}'$ a $\mathcal{M}''$ jsou koherentní $\mathcal{R}$-moduly, pak $\mathcal{M}$ je také koherentní $\mathcal{R}$-modul.
(ii) Nechť $\varphi \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ je morfismus koherentních $\mathcal{R}$-modulů. Pak $\mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Im}\,\varphi$ a $\mathrm{Coker}\,\varphi$ jsou koherentní $\mathcal{R}$-moduly.

Lemma A.12. Nechť $\mathcal{R}$ je levý koherentní svazek okruhů na topologickém prostoru X. Pak levý $\mathcal{R}$-modul $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{R}$-modul, právě tehdy když $\mathcal{M}$ je lokálně konečně prezentovaný $\mathcal{R}$-modul.

• Filtrované svazky okruhů

Definice A.13. Nechť $\mathcal{R}$ je svazek okruhů na topologickém prostoru X. Systém podsvazků abelovských grup $F = \{F_m\mathcal{R}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ splňující

(i) $F_m\mathcal{R} \subset F_{m+1}\mathcal{R}$,
(ii) $1 \in F_0\mathcal{R}$,
(iii) $F_\ell\mathcal{R} \cdot F_m\mathcal{R} \subset F_{\ell+m}\mathcal{R}$,
(iv) $\mathcal{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} F_m\mathcal{R}$

se nazývá filtrace na $\mathcal{R}$. Pak $(\mathcal{R}, F)$ budeme nazývat *filtrovaný svazek okruhů*. Pro filtrovaný svazek okruhů $(\mathcal{R}, F)$ položíme

$$\mathrm{gr}^F\mathcal{R} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}_m^F\mathcal{R}, \qquad \mathrm{gr}_m^F\mathcal{R} = F_m\mathcal{R}/F_{m-1}\mathcal{R}.$$

Kanonické zobrazení $F_m\mathcal{R} \to \mathrm{gr}_m^F\mathcal{R}$ budeme značit σ_m. Svazek abelovských grup $\mathrm{gr}^F\mathcal{R}$ je opatřen strukturou svazku okruhů vztahem

$$\sigma_\ell(a)\sigma_m(b) = \sigma_{\ell+m}(ab),$$

kde $a \in F_\ell\mathcal{R}(U)$ a $b \in F_m\mathcal{R}(U)$. Svazek okruhů $\mathrm{gr}^F\mathcal{R}$ budeme nazývat *asociovaný gradovaný svazek okruhů*.

Definice A.14. Nechť $(\mathcal{R}, F)$ je filtrovaný svazek okruhů na topologickém prostoru X. Dále nechť $\mathcal{M}$ je (levý) $\mathcal{R}$-modul. Systém podsvazků abelovských grup $F = \{F_p\mathcal{M}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ splňující

(i) $F_p\mathcal{M} \subset F_{p+1}\mathcal{M}$,
(ii) $F_m\mathcal{R} \cdot F_p\mathcal{M} \subset F_{m+p}\mathcal{M}$,
(iii) $\mathcal{M} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_p\mathcal{M}$

se nazývá filtrace na $\mathcal{M}$. Pak $(\mathcal{M}, F)$ budeme nazývat *filtrovaný* (levý) $\mathcal{R}$-modul. Pro filtrovaný $\mathcal{R}$-modul $(\mathcal{M}, F)$ položíme

$$\mathrm{gr}^F\mathcal{M} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}_p^F\mathcal{M}, \qquad \mathrm{gr}_p^F\mathcal{M} = F_p\mathcal{M}/F_{p-1}\mathcal{M}.$$

Kanonické zobrazení $F_p\mathcal{M} \to \mathrm{gr}_p^F\mathcal{M}$ budeme značit τ_p. Svazek abelovských grup $\mathrm{gr}^F\mathcal{M}$ je opatřen strukturou $\mathrm{gr}^F\mathcal{R}$-modulu vztahem

$$\sigma_m(a)\tau_p(s) = \tau_{m+p}(as),$$

kde $a \in F_m\mathcal{R}(U)$ a $s \in F_p\mathcal{M}(U)$. Dále $\mathrm{gr}^F\mathcal{R}$-modul $\mathrm{gr}^F\mathcal{M}$ budeme nazývat *asociovaný gradovaný* $\mathrm{gr}^F\mathcal{R}$*-modul*.

Definice A.15. Nechť $\mathcal{R}$ je filtrovaný svazek okruhů na topologickém prostoru X. Řekneme, že (levý) $\mathcal{R}$-modul $\mathcal{M}$ je *noetherovský* $\mathcal{R}$-modul, jestliže splňuje následující podmínky

(i) $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{R}$-modul,
(ii) pro každé $x \in X$ je $\mathcal{M}_x$ noetherovský (levý) $\mathcal{R}_x$-modul
(iii) pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ a pro každý systém $\{\mathcal{N}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ koherentních $\mathcal{R}|_U$-podmodulů $\mathcal{M}|_U$ je $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{N}_i$ koherentní $\mathcal{R}|_U$-modul.

Svazek okruhů $\mathcal{R}$ se nazývá levý *noetherovský svazek okruhů*, jestliže $\mathcal{R}$ je noetherovský $\mathcal{R}$-modul jako levý $\mathcal{R}$-modul.

Tvrzení A.16. Nechť $\mathcal{R}$ je svazek okruhů na lokálně kompaktním topologickém prostoru X a nechť $\mathcal{M}$ je (levý) $\mathcal{R}$-modul. Pak podmínka (iii) v definici A.15 je ekvivalentní podmínce

(iii)$'$ pro každou otevřenou množinu $U \subset X$, pro každé $x \in U$ a pro každou rostoucí posloupnost $\{\mathcal{N}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koherentních $\mathcal{R}|_U$-podmodulů $\mathcal{M}|_U$ existuje otevřené okolí $V \subset U$ bodu x a přirozené číslo n_0 splňující $\mathcal{N}_n|_V = \mathcal{N}_{n_0}|_V$ pro každé $n \geq n_0$,

pokud platí (i).

Tvrzení A.17. Nechť $\mathcal{R}$ je levý noetherovský svazek okruhů na topologickém prostoru X. Pak každý koherentní (levý) $\mathcal{R}$-modul $\mathcal{M}$ je noetherovský (levý) $\mathcal{R}$-modul.

• Nosič svazku

Definice A.18. Nechť $\mathcal{F}$ je svazek abelovských grup na topologickém prostoru X. Nosič svazku $\mathcal{F}$ je uzavřená podmnožina $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) \subset X$, která je definována jako doplněk sjednocení všech otevřený podmnožin $U \subset X$ splňující $\mathcal{F}|_U = 0$.

Lemma A.19.

(i) Nechť $\mathcal{F}$ je svazek abelovských grup na topologickém prostoru X. Pak

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \overline{\{x \in X;\, \mathcal{F}_x \neq 0\}}.$$

(ii) Nechť $\mathcal{R}$ svazek okruhů na topologickém prostoru X. Jestliže $\mathcal{F}$ je lokálně konečně gerenovaný $\mathcal{R}$-modul, pak

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X;\, \mathcal{F}_x \neq 0\}.$$

Důkaz. (i) Pokud $x \in X \setminus \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$, pak máme $\mathcal{F}_x = 0$. Tudíž obdržíme, že $\{x \in X;\, \mathcal{F}_x \neq 0\} \subset \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$. Jelikož $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ je uzavřená množina, dostaneme $\overline{\{x \in X;\, \mathcal{F}_x \neq 0\}} \subset \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$. Na druhou stranu jestliže $x \in \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$, pak pro každé otevřené okolí U bodu x je $\mathcal{F}|_U \neq 0$. Tedy existuje bod $x_U \in U$ takový, že $\mathcal{F}_{x_U} \neq 0$. Sestrojili jsme tedy zobecněnou posloupnost (x_U) v $\{x \in X;\, \mathcal{F}_x \neq 0\}$, pro kterou $x_U \to x$, a proto $x \in \overline{\{x \in X;\, \mathcal{F}_x \neq 0\}}$.

(ii) Stačí ukázat, že množina $\{x \in X;\, \mathcal{F}_x \neq 0\}$ je uzavřená. Předpokládejme, že $\mathcal{F}_x = 0$ pro $x \in X$. Jelikož $\mathcal{F}$ je lokálně konečně generovaný $\mathcal{R}$-modul, z tvrzení A.8 plyne, že existuje otevřené okolí U bodu x, pro které $\mathcal{F}|_U = 0$. Tedy množina $\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) \setminus \{x \in X;\, \mathcal{F}_x \neq 0\}$ je otevřená, což jsme chtěli ukázat. ♠

Tvrzení A.20. Nechť X je topologický prostor. Jestliže

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to 0. \tag{A.11}$$

je krátká exaktní posloupnost svazků abelovských grup, pak

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{M}) = \operatorname{Supp}(\mathcal{L}) \cup \operatorname{Supp}(\mathcal{N}). \tag{A.12}$$

Důkaz. Jestliže $x \notin \operatorname{Supp}(\mathcal{M})$, pak existuje otevřené okolí U bodu x takové, že $\mathcal{M}|_U = 0$. Navíc máme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to \mathcal{L}|_U \to \mathcal{M}|_U \to \mathcal{N}|_U \to 0$$

svazků abelovských grup, která implikuje $\mathcal{L}|_U = 0$ a $\mathcal{N}|_U = 0$. Tudíž dostaneme $x \notin \operatorname{Supp}(\mathcal{L}) \cup \operatorname{Supp}(\mathcal{N})$, čímž jsme dokázali inkluzi $\operatorname{Supp}(\mathcal{L}) \cup \operatorname{Supp}(\mathcal{N}) \subset \operatorname{Supp}(\mathcal{M})$.

Nyní dokážeme opačnou inkluzi. Předpokládejme, že $x \in \operatorname{Supp}(\mathcal{M})$ a zároveň $x \notin \operatorname{Supp}(\mathcal{L})$. Existuje tedy otevřené okolí U bodu x takové, že $\mathcal{L}|_U = 0$. Z krátké exaktní posloupnosti

$$0 \to \mathcal{L}|_U \to \mathcal{M}|_U \to \mathcal{N}|_U \to 0$$

svazků abelovských grup obdržíme, že $\mathcal{M}|_U \simeq \mathcal{N}|_U$. Tudíž máme $x \in \operatorname{Supp}(\mathcal{L})$ a tím je důkaz hotov. ♠

B Derivované a triangulované kategorie

Definice B.1. Kategorie $\mathcal{C}$ se nazývá *aditivní kategorie*, jestliže splňuje následující podmínky.

(i) Pro každé $A, B \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ má $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ strukturu abelovské grupy a zobrazení

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C),$$
$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

je bilineární zobrazení pro každé $A, B, C \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$.

(ii) Kategorie $\mathcal{C}$ má nulový objekt označovaný $0 \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$.

(iii) Pro každé $A, B \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ existuje biprodukt $A \oplus B \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$.

Definice B.2. Aditivní kategorie $\mathcal{C}$ se nazývá *abelovská kategorie*, jestliže splňuje následující podmínky.

(i) Pro každý morfismus $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ existuje $\ker(f)$ a $\mathrm{coker}(f)$.
(ii) Pro každý morfismus $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ je přirozený morfismus $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ izomorfismus.

Definice B.3. Nechť $\mathcal{D}$ je aditivní kategorie a $T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ je aditivní ekvivalence (*translace*).

(i) Posloupnost morfismů $X \to Y \to Z \to T(X)$ v $\mathcal{D}$ se nazývá *trojúhelník* v $\mathcal{D}$.
(ii) Morfismus trojúhelníků z $X \to Y \to Z \to T(X)$ do $X' \to Y' \to Z' \to T(X')$ je komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & T(X) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & T(X'). \end{tikzcd}$$

Jestliže navíc morfismy α, β, γ jsou izomorfismy, pak jsou trojúhelníky izomorfní.

Definice B.4. Řekneme, že aditivní kategorie s translací $(\mathcal{D}, T)$ spolu s třídou trojúhelníků $\mathcal{T}$ v $\mathcal{D}$, nazývané *význačné trojúhelníky*, je *triangulovaná kategorie*, pokud třída význačných trojúhelníků $\mathcal{T}$ splňuje následující axiomy (TR0)–(TR5).

(TR0) Trojúhelník izomorfní význačnému trojúhelníku je význačný trojúhelník.

(TR1) Pro každé $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ je $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$ význačný trojúhelník.

(TR2) Každý morfismus $f\colon X \to Y$ v $\mathcal{D}$ lze vnořit do význačného trojúhelníku $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$.

(TR3) Trojúhelník $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ je význačný trojúhelník, právě tehdy když $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} T(Y)$ je význačný trojúhelník.

(TR4) Jestliže $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ a $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} T(X')$ jsou význačné trojúhelníky a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

je komutativní diagram, pak existuje morfismus trojúhelníků

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & T(X) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & T(X') \end{tikzcd}$$

z $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ do $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} T(X')$.

(TR5) Jestliže

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z' \to T(X)$$
$$Y \xrightarrow{g} Z \to X' \to T(Y)$$
$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \to Y' \to T(X)$$

jsou význačné trojúhelníky, pak existuje význačný trojúhelník

$$Z' \to Y' \to X' \to T(Z')$$

takový, že následující diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & T(X) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_X)"] \\
X \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X'}"] & T(Y) \arrow[d] \\
Z' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & X' \arrow[r] & T(Z')
\end{tikzcd}$$

komutuje.

Definice B.5. Nechť $(\mathcal{D}, T)$ a $(\mathcal{D}', T')$ jsou triangulované kategorie. Řekneme, že aditivní funktor $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ je *funktor triangulovaných kategorií*, jestliže existuje přirozený izomorfismus

$$\eta\colon F \circ T \to T' \circ F$$

a každý význačný trojúhelník

$$X \to Y \to Z \to T(X)$$

v $\mathcal{D}$ funktor F zobrazuje na význačný trojúhelník

$$F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to T'(F(X))$$

v $\mathcal{D}'$, kde objekt $F(T(X))$ je identifikován s objektem $T'(F(X))$ skrze η.

Definice B.6. Abelovská podkategorie $\mathcal{C}'$ abelovské kategorie $\mathcal{C}$ se nazývá *tlustá podkategorie* (*thick subcategory*), jestliže pro každou exaktní posloupnost

$$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \to X_5 \tag{B.1}$$

v $\mathcal{C}$ s $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ pro $i = 1, 2, 4, 5$ je $X_3 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$.

Lemma B.7. Nechť $\mathcal{C}'$ je úplná abelovská podkategorie abelovské kategorie $\mathcal{C}$. Pak $\mathcal{C}'$ je tlustá podkategorie, pravá tehdy když je uzavřena na extenze, tj. jestliže pro každou krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0 \tag{B.2}$$

v $\mathcal{C}$ s $X', X'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ je $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{C}'$ je úplná abelovská podkategorie, která je uzavřena na extenze. Uvažujme nyní exaktní posloupnost

$$X_1 \xrightarrow{\alpha} X_2 \xrightarrow{\beta} X_3 \xrightarrow{\gamma} X_4 \xrightarrow{\delta} X_5$$

v $\mathcal{C}$ s $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ pro $i = 1, 2, 4, 5$. Pak máme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to \mathrm{coker}(\alpha) \to X_3 \to \ker(\delta) \to 0$$

v $\mathcal{C}$. Jelikož $\mathcal{C}'$ je úplná podkategorie, máme $\mathrm{coker}(\alpha), \ker(\delta) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$. Protože $\mathcal{C}'$ je uzavřena na extenze, obdržíme $X_3 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$. Obrácená implikace je zřejmá. ♠

Tvrzení B.8. Nechť $\mathcal{C}'$ je tlustá abelovská podkategorie abelovské kategorie $\mathcal{C}$ a $D^{\natural}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C})$ je úplná podkategorie $D^{\natural}(\mathcal{C})$ sestávající z objektů $X^{\bullet} \in \mathrm{Ob}(D^{\natural}(\mathcal{C}))$ takových, že $H^n(X^{\bullet}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Pak $D^{\natural}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C})$ je triangulovaná kategorie.

Důkaz. ♠

C Okruhy a moduly

V této sekci budeme uvažovat pouze komutativní okruhy, pokud nebude výslovně řečeno jinak.

Lemma C.1. (Nakayama) Nechť R je lokální okruh s maximálním ideálem $\mathfrak{m}$. Nechť M je konečně generovaný R-modul splňující $\mathfrak{m}M = M$, pak $M = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že $M \neq 0$. Nechť $s_1, s_2, \ldots, s_n \in M$ je minimální (ve smyslu počtu) systém generátorů R-modulu M. Poněvadž $\mathfrak{m}M = M$, můžeme psát

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i s_i,$$

kde $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathfrak{m}$. Tudíž dostaneme

$$(1 - m_n)s_n = \sum_{i=1}^{n-1} m_i s_i.$$

Avšak $1 - m_n$ je invertibilní element, tudíž $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ jsou generátory R-modul M, což je ale spor s minimalitou. ♠

Lemma C.2. Nechť R je noetherovský lokální okruh s maximálním ideálem $\mathfrak{m}$. Pak dimenze vektorového prostoru $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ nad tělesem $k = R/\mathfrak{m}$ je konečná.

Důkaz. Okruh R je neotherovský, tudíž ideál $\mathfrak{m}$ je konečně generovaný. Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{m}$ generátory ideálu $\mathfrak{m}$, pak jejich obrazy $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ v $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ generují vektorový prostor $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ nad tělesem k. ♠

Lemma C.3. Nechť R je noetherovský lokální okruh s maximálním ideálem $\mathfrak{m}$ a tělesem $k = R/\mathfrak{m}$. Pak $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ je rovna minimálnímu počtu generátorů $\mathfrak{m}$.

Důkaz. Označme $n = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Pak existují elementy $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{m}$ takové že $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ tvoří bázi $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ nad k. Dále nechť $\mathfrak{a}$ je ideál R generovaný $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pak $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ a $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}/\mathfrak{a}) = \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$. Avšak z Nakayamova lemmatu plyne, že $\mathfrak{m}/\mathfrak{a} = 0$, tudíž $a_1, a_2, \ldots, a_n$ generují ideál $\mathfrak{m}$. ♠

Definice C.4. Noetherovský lokální okruh R se nazývá *regulární lokální okruh*, jestliže

$$\dim R = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2), \tag{C.1}$$

kde $\dim R$ značí Krullovu dimenzi okruhu R, $\mathfrak{m}$ je maximální ideál $k = R/\mathfrak{m}$. Tedy okruh noetherovský lokální okruh R je regulární lokální okruh, jestliže minimální počet generátorů maximálního ideálu $\mathfrak{m}$ je roven $\dim R$. Odpovídající minimální množina generátorů se nazývá *regulární systém parametrů*.

D Analytické podmnožiny

Definice D.1. Nechť X je komplexní varieta. Podmnožina $V \subset X$ se nazývá *analytická podmnožina* (*analytic subset*) X, jestliže pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x a holomorfní funkce $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathcal{O}_X(U)$ takové, že $V \cap U = \{x \in U;\ f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$.

Lemma D.2. Nechť X je komplexní varieta.

(i) Analytické podmnožiny X jsou uzavřené.
(ii) Podmnožiny X a $\emptyset$ jsou analytické podmnožiny X.
(iii) Nechť V je analytická podmnožina X a $U \subset X$ je otevřená množina. Pak $V \cap U$ je analytická podmnožina U.
(iv) Jestliže analytická podmnožina V obsahuje vnitřní bod a X je souvislý topologický prostor, pak $V = X$.

Nechť X je komplexní varieta a V je analytická podmnožina X. Řekneme, že V je *reducibilní*, jestliže ji lze napsat jako sjednocení $V = V_1 \cup V_2$, kde V_1 a V_2 jsou vlastní analytické podmnožiny X; v opačném případě se V nazývá *ireducibilní.* Bod $x \in V$ se nazývá *regulární* (*nesingulární*) *bod* V, jestliže existuje otevřené okolí U bodu x takové, že $V \cap U$ je komplexní podvarieta X; v opačné případě se bod x nazývá *singulární bod* V. Množinu všech regulárních bodů V budeme značit V_{reg} a množinu všech singulárních bodů V budeme značit V_{sing}. Jestliže $V_{\mathrm{reg}} = V$, pak V se nazývá *hladká* (*nesingulární*) *analytická podmnožina* X.

Tvrzení D.3. Nechť X je komplexní varieta a $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul. Pak $\mathrm{Supp}(\mathcal{M})$ je analytická podmnožina X.

Důkaz. Poněvadž $\mathcal{M}$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul, je také lokálně konečně prezentovaný $\mathcal{O}_X$-modul. Z lemmatu A.19 plyne, že $\mathrm{Supp}(\mathcal{M}) = \{x \in X;\ \mathcal{M}_x \neq 0\}$. Dále pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x, nezáporná přirozená čísla $r_0, r_1 \in \mathbb{N}_0$ a krátká exaktní posloupnost

$$(\mathcal{O}_X|_U)^{r_1} \xrightarrow{\varphi} (\mathcal{O}_X|_U)^{r_0} \to \mathcal{M}|_U \to 0$$

$\mathcal{O}_X|_U$-modulů. Tedy $\mathcal{M}_y = 0$ pro $y \in U$, právě tehdy když $\varphi_y \colon (\mathcal{O}_{X,y})^{r_1} \to (\mathcal{O}_{X,y})^{r_0}$ je surjektivní. ♠

Definice D.4. Nechť X je komplexní varieta a V je analytická podmnožina X. Pak definujeme svazek ideálů $\mathcal{I}_V$ svazku okruhů $\mathcal{O}_X$ předpisem

$$\mathcal{I}_V(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U);\ (\forall x \in V) f(x) = 0\} \tag{D.1}$$

pro každou otevřenou množinu $U \subset X$.

Věta D.5. (Cartan) Nechť X je komplexní varieta a V je analytická podmnožina X. Pak svazek ideálů $\mathcal{I}_V$ je koherentní $\mathcal{O}_X$-modul.

Mějme komplexní varietu X. Je-li V analytická podmnožina X, pak

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_V) = V. \tag{D.2}$$

Definujeme-li svazek okruhů $\mathcal{O}_V$ na V vztahem

$$\mathcal{O}_V = (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_V)|_V, \tag{D.3}$$

pak $(V, \mathcal{O}_V)$ je lokálně okruhovaný prostor. Protože $\mathcal{O}_{X,x}$ je pro každé $x \in X$ noetheorovský lokální okruh, je $\mathcal{O}_{V,x}$ také lokální noetherovský okruh pro každé $x \in V$.